D13

I

Mathematics

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 162

Heft 3

Ausgegeben den 5. Juni 1930

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1930

Jährlich 8 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 162. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Hasse, Helmut, Die Normenresttheorie relativ-Abelscher Zahlkörper als Klassenkörpertheorie im Kleinen	145
Schmidt, Friedrich Karl, Zur Klassenkörpertheorie im Kleinen	155
Hasse, Helmut, Führer, Diskriminante und Verzweigungskörper relativ-Abelscher Zahlkörper	169
Kamke, E., Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung	185
Rados, G., Über die Verallgemeinerung eines Kroneckerschen Determinantensatzes	198
Krafft, M., Über die Bernoullische Reihenentwicklung	203

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Behringweg 7.

Die Normenresttheorie relativ-Abelscher Zahlkörper als Klassenkörpertheorie im Kleinen.

Von *Helmut Hasse* in Halle.

Diese Arbeit baut die Ergebnisse einer vorangegangenen Arbeit [1]) in einer weiteren Richtung aus. Ich zeige nämlich, daß die dort entwickelte Theorie der Normenreste beliebiger relativ-Abelscher Zahlkörper es ermöglicht, die Hauptsätze der Klassenkörpertheorie völlig analog auf einen $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper als Grundkörper zu übertragen. Anwendungen der so entstehenden Theorie auf die Charakterisierung der Verzweigungsgruppen, sowie auf Führer und Diskriminante relativ-Abelscher Zahlkörper sollen in einer anschließenden Arbeit gegeben werden.

I. Es sei k ein algebraischer Zahlkörper, K ein Erweiterungskörper endlichen Grades von k.

Ich betrachte ein beliebiges Primideal $\mathfrak{p}$ von k und einen seiner Primteiler $\mathfrak{P}$ in K. Es bezeichne $\bar{k}$ den Körper der $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen zu k und $\overline{K}$ den Körper der $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen zu K. Der kurzen Ausdrucksweise halber will ich $\overline{K}$ *Grenzkörper* zu K und K *Kernkörper* zu $\overline{K}$ nennen.

$\overline{K}$ ist das Kompositum $K\bar{k}$. Falls also K/k Galoissch ist, ist auch $\overline{K}/\bar{k}$ Galoissch, und die Galoissche Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\overline{K}/\bar{k}$ ist isomorph zu derjenigen Untergruppe der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ von K/k, die dem Durchschnitt von K und $\bar{k}$ im Sinne der Galoisschen Theorie zugeordnet ist. In diesem Durchschnitt ist aber der $\mathfrak{P}$ entsprechende Primteiler vom Grad 1 und der Ordnung 1 bez. $\mathfrak{p}$, in jedem in K enthaltenen echten Erweiterungskörper dagegen von einem höheren Grad oder einer höheren Ordnung. Daher ist jener Durchschnitt der Zerlegungskörper K_z, die ihm zugeordnete Untergruppe die Zerlegungsgruppe $\mathfrak{G}_z$ zu $\mathfrak{P}$ für K/k, und $\overline{\mathfrak{G}}$ ist zu $\mathfrak{G}_z$ isomorph. Einen Isomorphismus zwischen $\overline{\mathfrak{G}}$ und $\mathfrak{G}_z$ erhält man, indem man den Substitutionen $\bar{\sigma}$ von $\overline{K}/\bar{k}$ die durch sie bewirkten Substitutionen σ von K/K_z zuordnet. Diesen Isomorphismus bezeichne ich zur Abkürzung mit $\mathfrak{J}$.

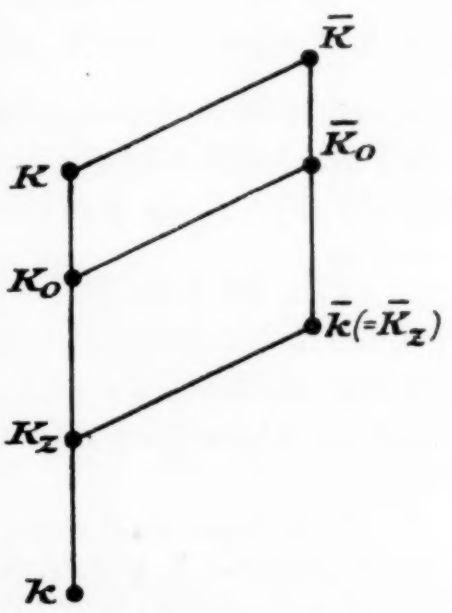

Fig. 1.

Sind $\mathfrak{G}_0$ und $\overline{\mathfrak{G}}_0$ durch $\mathfrak{J}$ zugeordnete Untergruppen von $\mathfrak{G}_z$ und $\overline{\mathfrak{G}}$, sind ferner K_0 und $\overline{K}_0$ die ihnen nach der Galoisschen Theorie zugeordneten Teilkörper von K und $\overline{K}$, so ist $\overline{K}_0$ Grenzkörper zum Körper K_0 in bezug auf den $\mathfrak{P}$ entsprechenden Primteiler $\mathfrak{P}_0$ in K_0.

[1]) *H. Hasse*, Neue Begründung und Verallgemeinerung der Theorie des Normenrestsymbols, ds. Journ. **162** (1930). — Im folgenden zitiert mit N. R.

Die den weiteren Hilbertschen Untergruppen: Trägheitsgruppe $\mathfrak{G}_T$, Verzweigungsgruppen $\mathfrak{G}_{V_i}$ zu $\mathfrak{P}$ für K/k durch $\mathfrak{J}$ zugeordneten Untergruppen $\overline{\mathfrak{G}}_T$, $\overline{\mathfrak{G}}_{V_i}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ sind durch entsprechende Kongruenzen in $\overline{K}$ charakterisiert, wie $\mathfrak{G}_T$, $\mathfrak{G}_{V_i}$ in K, und mögen daher in gleicher Weise benannt werden. Ebenso mögen die den weiteren Hilbertschen Teilkörpern: Trägheitskörper K_T, Verzweigungskörper K_{V_i} als Grenzkörper zugeordneten Teilkörper $\overline{K}_T$, $\overline{K}_{V_i}$ in gleicher Weise benannt werden, wie K_T, K_{V_i}.

II. Sei nun K/k Galoissch oder nicht, immer läßt sich *die $\overline{K}$ zugeordnete Zahl-Zahlgruppe $\overline{H}$ in $\overline{k}$* erklären als die Gruppe aller Normen nach $\overline{k}$ von Zahlen $\neq 0$ aus $\overline{K}$. Es bezeichne $\overline{A}$ die Gruppe aller Zahlen $\neq 0$ aus $\overline{k}$, so daß $\overline{A}/\overline{H}$ die *Klassengruppe nach $\overline{H}$* ist. Für hinreichend hohes r ist der Strahl $\overline{S}_r$ mod. $\mathfrak{p}^r$, d. h. die Gesamtheit aller $\overline{\beta} \equiv 1$ mod. $\mathfrak{p}^r$ aus $\overline{k}$ in $\overline{H}$ enthalten; denn bei beliebigem n sind für hinreichend hohes r diese $\overline{\beta}$ sämtlich n-te Potenzen in $\overline{k}$; also Normen aus $\overline{K}$, wenn n als der Grad von $\overline{K}/\overline{k}$ gewählt wird. Hiernach existiert eine niedrigste Potenz $\mathfrak{p}^r$, so daß $\overline{H}$ noch den Strahl $\overline{S}_r$ enthält; ich nenne sie den *Führer $\overline{\mathfrak{f}}$ von $\overline{H}$*.

Diese Begriffe stehen in Analogie zu den folgenden aus der Klassenkörpertheorie geläufigen Begriffen, die ich hier (ebenso wie nachher die Hauptsätze) etwas anders wie in meinem „Bericht“ [1]) formuliere. Ist zunächst irgendein ganzes Ideal $\mathfrak{m}$ in k vorgegeben, so ist die K mod. $\mathfrak{m}$ zugeordnete Idealgruppe $H_\mathfrak{m}$ in k erklärt als die Gruppe aller Ideale aus denjenigen Strahlklassen mod. $\mathfrak{m}$ in k, die durch Normen nach k zu $\mathfrak{m}$ primer Ideale aus K geliefert werden. Es sei $\mathfrak{f}_\mathfrak{m}$ der Führer von $H_\mathfrak{m}$, also das niedrigste Ideal in k, für das $H_\mathfrak{m}$ noch die zu $\mathfrak{m}$ primen Ideale des Strahls $S_{\mathfrak{f}_\mathfrak{m}}$ mod. $\mathfrak{f}_\mathfrak{m}$ enthält. Dann werde $H_\mathfrak{m}$ mod. $\mathfrak{f}_\mathfrak{m}$ erklärt, d. h. zu der Idealgruppe $H_\mathfrak{m} S_{\mathfrak{f}_\mathfrak{m}} = H_{\mathfrak{f}_\mathfrak{m}}$ vom Führer $\mathfrak{f}_\mathfrak{m}$ aufgefüllt. Bedeutet nun $\mathfrak{m} \to 0$, daß in $\mathfrak{m}$ nach und nach jede noch so hohe Potenz jedes Primideals von k aufgenommen werden soll, so existiert nach einem grundlegenden Satz aus der Klassenkörpertheorie [2]) $\lim\limits_{\mathfrak{m}\to 0} \mathfrak{f}_\mathfrak{m} = \mathfrak{f}$ als endliches Ideal [3]) und $\lim\limits_{\mathfrak{m}\to 0} H_{\mathfrak{f}_\mathfrak{m}} = H_\mathfrak{f} = H$ als Idealgruppe vom Führer $\mathfrak{f}$, also von endlichem Index und somit endlicher Klassengruppe A/H in der Gruppe A aller zu $\mathfrak{f}$ primen Ideale aus k. Damit ist, von $\mathfrak{m}$ unabhängig, schlechthin *die K zugeordnete Idealgruppe H in k* erklärt.

III. Ist nun K/k Abelsch, so ist K *Klassenkörper zu H*, d. h. es gelten die folgenden Tatsachen, die es gestatten, in der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ zum Ausdruck kommende algebraische und arithmetische Eigenschaften von K/k in die Klassengruppe A/H zu übersetzen und umgekehrt:

---

[1]) *H. Hasse*, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresber. d. D. M.-V. **35** (1926) und **36** (1927). — Ich belege im folgenden Tatsachen aus der Klassenkörpertheorie nur insoweit mit Zitaten, wie sie in diesem „Bericht“ noch nicht berücksichtigt sind.

[2]) Siehe meinen in der vorigen Anmerkung zitierten „Bericht“, Teil I, Satz 8; falls K/k nicht Galoissch, Satz 1 der Arbeit: *H. Hasse* und *A. Scholz*, Zur Klassenkörpertheorie auf Tagakischer Grundlage, Math. Zeitschr. **29** (1928).

[3]) Die Endlichkeit ist im Sinne der Prüfer-v. Neumannschen Begründung der algebraischen Zahlentheorie verstanden, der auch der Grenzbegriff entnommen ist. Siehe *H. Prüfer*, Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie, Math. Ann. **94** (1925); *J. v. Neumann*, Zur Prüferschen Theorie der idealen Zahlen, Acta litt. ac scient. Szeged **2** (1926). Aus mehr als bloß formalen Gründen verweise ich an dieser Stelle auf die Prüfer-v. Neumannsche Theorie; vgl. meine Ausführungen auf S. 150 oben.

1. *Die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ von K/k ist isomorph zur Klassengruppe A/H.*

Einen Isomorphismus zwischen $\mathfrak{G}$ und A/H erhält man, indem man jeder durch ihre Ideale $\mathfrak{b}$ repräsentierten Klasse nach H die durch das Artin-Symbol[1] $\left(\frac{K}{\mathfrak{b}}\right)$ *dargestellte Substitution σ aus $\mathfrak{G}$ zuordnet*[2].

2. *Diese elementweise Zuordnung zwischen $\mathfrak{G}$ und A/H ist im Einklang mit der untergruppenweisen Zuordnung, die man erhält, indem man jeder Untergruppe $\mathfrak{G}_0$ von $\mathfrak{G}$ einen Teilkörper K_0 von K im Sinne der Galoisschen Theorie zuordnet, und diesem dann seine zugeordnete Idealgruppe H_0 in k und damit eine Untergruppe H_0/H von A/H*[3].

Die Aussagen **1.** und **2.** will ich den **Isomorphiesatz** der Klassenkörpertheorie nennen.

3. *Auf die in* **1.** *oder* **2.** *beschriebene Weise ist zugeordnet:*

a) *der Trägheitsgruppe $\mathfrak{G}_T$ zu $\mathfrak{p}$ die engste H enthaltende Idealgruppe H_T von zu $\mathfrak{p}$ primem Führer,*

b) *der Zerlegungsgruppe $\mathfrak{G}_Z$ zu $\mathfrak{p}$ die engste H enthaltende Idealgruppe von zu $\mathfrak{p}$ primem Führer, die $\mathfrak{p}$ enthält.*

Die Aussagen **3.** ergeben auf Grund der Hilbertschen Theorie des Galoisschen Körpers den **Diskriminanten- und Zerlegungssatz** der Klassenkörpertheorie:

3′. *Ist e der Index von H in H_T und f der Index von H_T in H_Z, so haben die Primteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ in K die Ordnung e und den Grad f bezüglich $\mathfrak{p}$.*

Insbesondere:

a) *Dann und nur dann ist $e > 1$, d. h. die Diskriminante $\mathfrak{d}$ von K/k durch $\mathfrak{p}$ teilbar, wenn der Führer $\mathfrak{f}$ von H durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist.*

b) *Der Grad f bezüglich $\mathfrak{p}$ der Primteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ in K ist der kleinste positive Exponent, für den $\mathfrak{p}^f$ in H_T liegt.*

Diesen Tatsachen der „Klassenkörpertheorie im Großen“ lassen sich ganz analoge Tatsachen einer „Klassenkörpertheorie im Kleinen“ an die Seite stellen. Sie beziehen sich zunächst auf einen solchen Abelschen Körper $\overline{K}/\overline{k}$, der einem Abelschen Körper K/k als Grenzkörper zugeordnet ist. Es gelten dann, wie ich nachher zeigen werde, die folgenden Tatsachen, die es wieder gestatten, in der Galoisschen Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ zum Ausdruck kommende algebraische und arithmetische Eigenschaften von $\overline{K}/\overline{k}$ in die Klassengruppe $\overline{A}/\overline{H}$ zu übersetzen und umgekehrt, und auf Grund deren ich daher *$\overline{K}$ Klassenkörper zu $\overline{H}$ nenne*:

1. *Die Galoissche Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\overline{K}/\overline{k}$ ist isomorph zur Klassengruppe $\overline{A}/\overline{H}$.*

Einen Isomorphismus zwischen $\overline{\mathfrak{G}}$ und $\overline{A}/\overline{H}$ erhält man, indem man zunächst jeder durch ihre Zahlen $\overline{\beta}$ repräsentierten Klasse nach $\overline{H}$ die durch mein Normenrestsymbol[4] $\left(\frac{\overline{\beta}, K}{\mathfrak{p}}\right)$ *dargestellte Substitution σ aus $\mathfrak{G}_Z$ zuordnet, und dieser dann die ihr durch den Isomorphismus $\mathfrak{J}$ zugeordnete Substitution $\bar{\sigma}$ aus $\overline{\mathfrak{G}}$.*

2. *Diese elementweise Zuordnung zwischen $\overline{\mathfrak{G}}$ und $\overline{A}/\overline{H}$ ist im Einklang mit der untergruppenweisen Zuordnung, die man erhält, indem man jeder Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}_0$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ einen*

---

[1]) Dessen Definition siehe in N. R.

[2]) *E. Artin*, Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes, Hamb. Abh. **5** (1927).

[3]) Diese bisher nirgends explizit formulierte Tatsache ist implizit in der in der vorigen Anmerkung zitierten Arbeit enthalten. Siehe dort S. 356, Abs. 2.

[4]) Dessen in N. R. gegebene Definition ist natürlich ohne weiteres auf Zahlen $\bar{\beta}$ aus $\bar{k}$ übertragbar, indem die dortige Hilfszahl β_0 nach wie vor aus k selbst gewählt wird.

Teilkörper $\overline{K}_0$ *von* $\overline{K}$ *im Sinne der Galoisschen Theorie zuordnet, und diesem dann seine zugeordnete Zahlgruppe* $\overline{H}_0$ *in* $\overline{k}$ *und damit eine Untergruppe* $\overline{H}_0/\overline{H}$ *von* $\overline{A}/\overline{H}$.

Die Aussagen **$\overline{1}$.** und **$\overline{2}$.** will ich wieder den **Isomorphiesatz** nennen.

$\overline{3}$. *Auf die in* **$\overline{1}$.** *oder* **$\overline{2}$.** *beschriebene Weise ist zugeordnet:*

Der Trägheitsgruppe $\overline{\mathfrak{G}}_T$ *die engste* $\overline{H}$ *enthaltende Zahlgruppe* $\overline{H}_T$ *vom Führer* $\mathfrak{p}^0$ [1]).

Die Aussage **$\overline{3}$.** ergibt auf Grund der Ausführungen auf S. 146 oben den **Diskriminanten- und Zerlegungssatz:**

$\overline{3}$. *Ist* e *der Index von* $\overline{H}$ *in* $\overline{H}_T$ *und* f *der Index von* $\overline{H}_T$ *in* $\overline{A}$, *so hat der Primteiler* $\overline{\mathfrak{P}}$ *von* $\mathfrak{p}$ *in* $\overline{K}$ *die Ordnung* e *und den Grad* f *bezüglich* $\mathfrak{p}$.

Insbesondere:

ā) *Dann und nur dann ist* $e > 1$, *d. h. die Diskriminante* $\overline{\mathfrak{d}}$ *von* $\overline{K}/\overline{k}$ *eine positive Potenz von* $\mathfrak{p}$, *wenn der Führer* $\overline{\mathfrak{f}}$ *von* $\overline{H}$ *eine positive Potenz von* $\mathfrak{p}$ *ist.*

b̄) *Der Grad* f *bezüglich* $\mathfrak{p}$ *des Primteilers* $\overline{\mathfrak{P}}$ *von* $\mathfrak{p}$ *in* $\overline{K}$ *ist der kleinste positive Exponent, für den die Zahlen des Ideals* $\mathfrak{p}'$ *aus* $\overline{k}$ *in* $\overline{H}_T$ *liegen.*

IV. In der Klassenkörpertheorie im Großen gilt ferner für zwei Abelsche Körper K/k und K'/k mit den zugeordneten Idealgruppen H und H' in k der **Anordnungs- und Eindeutigkeitssatz:**

4. *Die Relationen*

$$K \geqq K' \quad und \quad H \leqq H',$$

insbesondere also die Relationen

$$K = K' \quad und \quad H = H'$$

bedingen sich gegenseitig.

Dem tritt eine entsprechende Tatsache in der Klassenkörpertheorie im Kleinen zur Seite. Sie bezieht sich zunächst wieder auf zwei solche Abelsche Körper $\overline{K}/\overline{k}$ und $\overline{K}'/\overline{k}$, mit den zugeordneten Zahlgruppen $\overline{H}$ und $\overline{H}'$ in $\overline{k}$, die zwei Abelschen Körpern K/k und K'/k als Grenzkörper zugeordnet sind. Es gilt dann, wie ich zeigen werde, der **Anordnungs- und Eindeutigkeitssatz:**

$\overline{4}$. *Die Relationen*

$$\overline{K} \geqq \overline{K}' \quad und \quad \overline{H} \leqq \overline{H}',$$

insbesondere also die Relationen

$$\overline{K} = \overline{K}' \quad und \quad \overline{H} = \overline{H}'$$

bedingen sich gegenseitig.

Ich habe die Behauptungen **$\overline{1}$.**—**$\overline{4}$.** zunächst unter der Einschränkung ausgesprochen, daß die in Rede stehenden Abelschen Körper $\overline{K}/\overline{k}$ Grenzkörper Abelscher Körper K/k sind. Bei den nachfolgenden Beweisen werde ich von dieser Forderung Gebrauch machen. Ich möchte aber behaupten, ohne hier weiter darauf einzugehen, daß darin in Wahrheit gar keine Einschränkung liegt [2]).

V. Weiter nenne ich den folgenden Satz aus der Klassenkörpertheorie im Großen:

5. *Es sei* k/k_0 *zyklisch und* σ *eine erzeugende Substitution der Galoisschen Gruppe von* k/k_0. *Dann gilt:*

---

[1]) Das Analogon zu **3.** b) gilt auch noch, ist aber trivial, weil einerseits die Zerlegungsgruppe $\overline{\mathfrak{G}}_Z$ mit der vollen Galoisschen Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ zusammenfällt, andererseits die engste $\overline{H}$ enthaltende Zahlgruppe $\overline{H}_Z$ vom Führer $\mathfrak{p}^0$, die die Zahlen des Ideals $\mathfrak{p}$ aus $\overline{k}$ enthält, mit der vollen Gruppe $\overline{A}$ zusammenfällt.

[2]) Siehe die nachfolgende Arbeit von *F. K. Schmidt.*

a) *Dann und nur dann, wenn K/k_0 Galoissch ist, ist H bei σ invariant.*

b) *Dann und nur dann, wenn K/k_0 sogar Abelsch ist, sind sogar die Klassen nach H bei σ invariant* [1]).

Analog gilt in der Klassenkörpertheorie im Kleinen der folgende Satz, den ich hier wieder unter der Einschränkung beweisen werde, daß $\overline{K}/\overline{k}_0$ Grenzkörper eines Körpers K/k_0 ist, wobei ich aber ebenfalls behaupten möchte, daß in dieser Forderung in Wahrheit gar keine Einschränkung liegt:

$\overline{5}$. *Es sei $\overline{k}/\overline{k}_0$ zyklisch und $\bar{\sigma}$ eine erzeugende Substitution der Galoisschen Gruppe von $\overline{k}/\overline{k}_0$. Dann gilt:*

a) *Dann und nur dann, wenn $\overline{K}/\overline{k}_0$ Galoissch ist, ist $\overline{H}$ bei $\bar{\sigma}$ invariant.*

b) *Dann und nur dann, wenn $\overline{K}/\overline{k}_0$ sogar Abelsch ist, sind sogar die Klassen nach $\overline{H}$ bei $\bar{\sigma}$ invariant.*

VI. Schließlich gelten in der Klassenkörpertheorie im Großen ein **Abgrenzungssatz,** der nämlich den Gültigkeitsbereich der Sätze der Klassenkörpertheorie auf die Abelschen Körper K/k allein abgrenzt, und der **Existenzsatz:**

6. *Ist K/k nicht Abelsch, so ist der Index der K zugeordneten Idealgruppe H in k kleiner als der Grad von K/k* [2]).

7. *Zu jeder Idealgruppe H in k, deren Führer $\mathfrak{f}$ ein endliches Ideal ist, und die nur aus zu $\mathfrak{f}$ primen Idealen besteht, existiert ein Abelscher Körper K/k, dessen zugeordnete Idealgruppe in k gerade H ist.*

Ich möchte behaupten, ohne hier auf die Beweise einzugehen, [3]) daß auch in der Klassenkörpertheorie im Kleinen ein analoger **Abgrenzungssatz** und ein analoger **Existenzsatz** gelten:

$\overline{6}$. *Ist $\overline{K}/\overline{k}$ nicht Abelsch, so ist der Index der $\overline{K}$ zugeordneten Zahlgruppe $\overline{H}$ in $\overline{k}$ kleiner als der Grad von $\overline{K}/\overline{k}$.*

$\overline{7}$. *Zu jeder Zahlgruppe $\overline{H}$ in $\overline{k}$, deren Führer $\overline{\mathfrak{f}}$ eine endliche Potenz von $\mathfrak{p}$ ist, und die nicht nur aus zu $\mathfrak{p}$ primen Zahlen besteht, existiert ein Abelscher Körper $\overline{K}/\overline{k}$, dessen zugeordnete Zahlgruppe in $\overline{k}$ gerade $\overline{H}$ ist.*

VII. Um die Bedeutungslosigkeit der genannten Einschränkung in $\overline{1}$. — $\overline{4}$. zu beweisen, hätte man für jeden vorgegebenen Abelschen Körper $\overline{K}/\overline{k}$ die Existenz (mindestens) eines Abelschen Kernkörpers K/k zu zeigen, dem $\overline{K}/\overline{k}$ als Grenzkörper zugeordnet ist; entsprechend hätte man in $\overline{5}$. zu verfahren, und so könnte man auch einen Beweis von $\overline{6}$. ansetzen. Um diesen und auch einen Beweis von $\overline{7}$. zu führen, hätte man ferner für jede vorgegebene Idealgruppe $\overline{H}$ in $\overline{k}$ mit den in $\overline{7}$. genannten Eigenschaften die Existenz (mindestens) einer „Kerngruppe“ H in k von endlichem Führer zu zeigen, der $\overline{H}$ in einer bestimmten, leicht anzugebenden Art als „Grenzgruppe“ zugeordnet ist.

Diese Beweismethode wäre die naturgemäße Fortführung der im folgenden zum Beweise der Behauptungen $\overline{1}$.—$\overline{5}$. verwendeten Methode, die man kurz so charakterisieren kann: Die Sätze der Klassenkörpertheorie im Kleinen werden aus den entspre-

---

[1]) *H. Hasse*, Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörpertheoretischer Grundlage, Math. Zeitschr. **31** (1920). Siehe dort § 2.

[2]) Siehe oben S. 146, Anm. 2.

[3]) Siehe die nachfolgende Arbeit von *F. K. Schmidt*.

chenden Sätzen der Klassenkörpertheorie im Großen erschlossen. Von einem Aufbau der Klassenkörpertheorie, der umgekehrt zunächst die Sätze der Klassenkörpertheorie im Kleinen ab ovo entwickelt, und dann — vielleicht mittels der Prüfer-v. Neumannschen Theorie der idealen Zahlen — den Grenzübergang zur Klassenkörpertheorie im Großen vollzieht, verspreche ich mir eine erhebliche gedankliche, wenn nicht auch sachliche Vereinfachung der Beweise der Klassenkörpertheorie, die ja in ihrem bisherigen ungehobelten Zustande wenig geeignet sind, das Studium dieser in ihren Resultaten so glatten Theorie verlockend erscheinen zu lassen.

Beweis des Isomorphiesatzes $\overline{1}$.

Ich verweise dazu vor allem auf N. R. Die dortigen Ausführungen ergeben ohne weiteres die Behauptung $\overline{1}$., wenn man noch die folgende Tatsache hinzunimmt:

Eine Zahl aus $\bar{k}$ ist dann und nur dann Norm nach $\bar{k}$ einer Zahl aus $\overline{K}$, wenn sie Normenrest von K mod. jeder noch so hohen Potenz von $\mathfrak{p}$ ist.

Oder auch:

Dann und nur dann liegt $\bar{\beta}$ in der $\overline{K}$ zugeordneten Zahlgruppe $\overline{H}$ in $\bar{k}$, wenn das Normenrestsymbol $\left(\frac{\bar{\beta}, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ *ist.*

Zum Beweise bezeichne $\overline{X}$ die Gruppe der Zahlen $\bar{\beta}$ aus $\bar{k}$, für die $\left(\frac{\bar{\beta}, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ ist. Weil jede Norm von $\overline{K}$ nach $\bar{k}$ a fortiori Normenrest von K mod. jeder noch so hohen Potenz von $\mathfrak{p}$ ist, ist jedenfalls $\overline{H} \leqq \overline{X}$. Um die Behauptung $\overline{H} = \overline{X}$ zu beweisen, genügt es also, zu zeigen, daß der Index von $\overline{H}$ höchstens so groß wie der Index von $\overline{X}$, d. h. (nach N. R., Zusatz zu Satz 5) wie der Relativgrad von $\overline{K}/\bar{k}$ ist. Das ergibt sich aber leicht durch sukzessive zyklische Erweiterung von Primzahlgrad, wenn es nur für den folgenden Fall feststeht:

K/k ist zyklisch von Primzahlgrad, und der Zerlegungskörper K_z zu $\mathfrak{p}$ ist k selbst, d. h. $\overline{K}/\bar{k}$ ist ebenfalls zyklisch von Primzahlgrad.

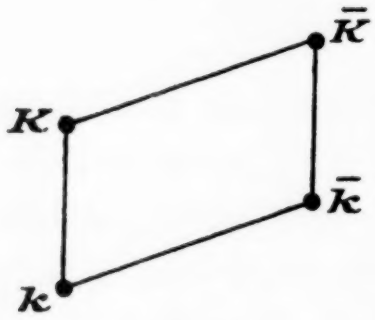

Fig. 2.

In diesem Falle läßt sich nun die Behauptung $\overline{H} = \overline{X}$ mittels zweier Hilfssätze aus der Takagischen Theorie der Geschlechter [1]) wie folgt beweisen:

Sei für jedes $r \geqq 0$:

$$\bar{\beta} \equiv \mathsf{N}(\mathsf{B}_r) \text{ mod. } \mathfrak{p}^r \text{ mit } \mathsf{B}_r \text{ aus } K.$$

Dann bilden die B_r eine Zahlenfolge in K, der jedenfalls die Eigenschaft:

$$\mathsf{N}\left(\frac{\mathsf{B}_{r+1}}{\mathsf{B}_r}\right) \equiv 1 \text{ mod. } \mathfrak{p}^r$$

zukommt. Nach den eben zitierten Sätzen folgt aber daraus:

$$\frac{\mathsf{B}_{r+1}}{\mathsf{B}_r} \equiv \mathsf{A}_r^{1-\sigma} \text{ mod. } \mathfrak{P}^{u_r} \text{ mit } \mathsf{A}_r \text{ aus } K,$$

wo σ eine erzeugende Substitution der Galoisschen Gruppe von K/k bezeichnet, und wo die u_r bestimmte, mit r monoton über alle Grenzen wachsende Exponenten sind.

---

[1]) *T. Takagi*, Über eine Theorie des relativ-Abelschen Zahlkörpers, Journ. Coll. Science Tokyo 41 (1920), § 14, Hilfssätze 1 und 2. — Siehe diese auch in meinem oben S. 146, Anm. 1 zitierten „Bericht", Teil I a, § 19, Satz 21, sowie in der übernächsten Arbeit dieses Bandes, S. 177, I und II.

Wird dementsprechend die Zahlenfolge B_r durch die Zahlenfolge:

$$\mathsf{B}'_0 = \mathsf{B}_0, \quad \mathsf{B}'_{r+1} = \frac{\mathsf{B}_{r+1}}{(\mathsf{A}_1 \dots \mathsf{A}_r)^{1-\sigma}}$$

aus K ersetzt, so gilt nach wie vor:

$$\bar{\beta} \equiv \mathsf{N}(\mathsf{B}'_r) \bmod \mathfrak{p}^r,$$

aber es ist jetzt:

$$\frac{\mathsf{B}'_{r+1}}{\mathsf{B}'_r} \equiv 1 \bmod \mathfrak{P}^{u_r}.$$

Die letztere Tatsache besagt, daß die Folge B'_r $\mathfrak{P}$-adisch konvergent ist, also einen Grenzwert:

$$\overline{\mathsf{B}}' = \prod_{r=0}^{\infty} \frac{\mathsf{B}'_{r+1}}{\mathsf{B}'_r}$$

in $\overline{K}$ besitzt. Für diesen ist:

$$\overline{\mathsf{B}}' \equiv \mathsf{B}'_r \bmod \mathfrak{P}^{u_r},$$

und daher, wieder nach den zuvor zitierten Sätzen:

$$\mathsf{N}(\overline{\mathsf{B}}') \equiv \mathsf{N}(\mathsf{B}'_r) \bmod \mathfrak{p}^r.$$

Es ist also:

$$\bar{\beta} \equiv \mathsf{N}(\overline{\mathsf{B}}') \bmod \mathfrak{p}^r.$$

Da dies für jedes $r \geqq 0$ gilt, folgt in der Tat:

$$\bar{\beta} = \mathsf{N}(\overline{\mathsf{B}}').$$

Beweis des Isomorphiesatzes $\overline{2}$.

Es ist zu zeigen, daß für die Zahlen $\bar{\beta}_0$ aus der Untergruppe $\overline{H}_0$ von $\overline{A}$ das Normenrestsymbol $\left(\frac{\bar{\beta}_0, K}{\mathfrak{p}}\right)$ in derjenigen Untergruppe $\mathfrak{G}_0$ von $\mathfrak{G}_z$ liegt, die der Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}_0$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ durch den Isomorphismus $\mathfrak{J}$ zugeordnet ist.

Ist nun K_0 der Kernkörper zu $\overline{K}_0$, so ist einerseits für jene $\bar{\beta}_0$ auf Grund der in $\overline{2}$. zwischen $\overline{\mathfrak{G}}_0, \overline{K}_0, \overline{H}_0$ vorausgesetzten Beziehungen:

$$\left(\frac{\bar{\beta}_0, K_0}{\mathfrak{p}}\right) = \mathfrak{G}_0, \tag{1}$$

nämlich gleich der Einheit der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ von K_0/k. Andererseits ist nach N. R., Satz 7:

$$\left(\frac{\bar{\beta}_0, K_0}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\bar{\beta}_0, K}{\mathfrak{p}}\right) \mathfrak{G}_0, \tag{2}$$

nämlich gleich der durch die Substitution $\left(\frac{\bar{\beta}_0, K}{\mathfrak{p}}\right)$ von K/k gelieferten Substitution von K_0/k.

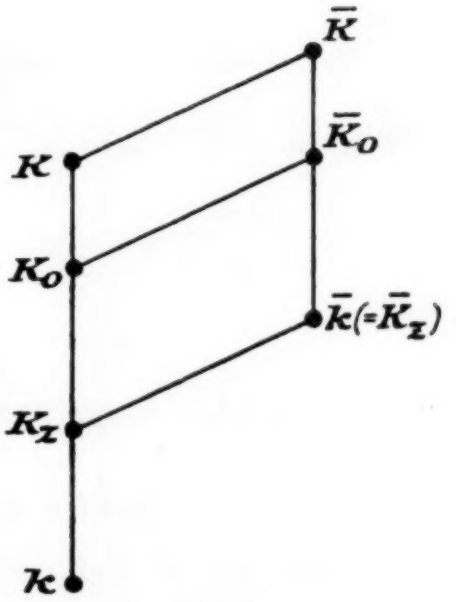

Fig. 3.

Aus (1) und (2) ergibt sich in der Tat, daß $\left(\frac{\bar{\beta}_0, K}{\mathfrak{p}}\right)$ in $\mathfrak{G}_0$ liegt.

Beweis des Diskriminanten- und Zerlegungssatzes $\overline{3}$.

Bedenkt man, daß nach **3.** der Trägheitsgruppe $\mathfrak{G}_T$ zu $\mathfrak{p}$ auf die in **2.** beschriebene Weise die engste H enthaltende Idealgruppe H_T von zu $\mathfrak{p}$ primem Führer zugeordnet ist, so ergibt sich die Behauptung $\overline{3}$. ohne weiteres, wenn man die nachstehend für K/k selbst formulierte Tatsache auf die Teilkörper von K/k anwendet:

Der Führer $\overline{\mathfrak{f}}$ *von* $\overline{H}$ *ist gleich dem Beitrag* $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{p}$ *zum Führer* $\mathfrak{f}$ *von* H.

Zum Beweise dieser Tatsache sind die folgenden beiden Feststellungen zu machen:

a) Es ist $\overline{\mathfrak{f}}$ Teiler von $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$, d. h. $\overline{H}$ enthält den Strahl mod. $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ in $\overline{k}$.

b) Es ist $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ Teiler von $\overline{\mathfrak{f}}$, d. h. H enthält den Strahl mod. $\overline{\mathfrak{f}}\,\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}}$ in k.

a) Es sei $\overline{\beta} \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}_\mathfrak{p}$. Ist dann β eine zur Bildung des Normenrestsymbols $\left(\frac{\overline{\beta}, k}{\mathfrak{p}}\right)$ geeignete Hilfszahl:

$$\beta \equiv \overline{\beta} \bmod \mathfrak{f}_\mathfrak{p},\ \beta \equiv 1 \bmod \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}},$$

$$\beta = \mathfrak{p}^b \mathfrak{b},\ \mathfrak{b} \text{ prim zu } \mathfrak{p},$$

so folgt:

$$\mathfrak{b} = \beta \equiv 1 \bmod \mathfrak{f},$$

also nach **1.**:

$$\left(\frac{\overline{\beta}, K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{K}{\beta}\right) = 1.$$

Nach $\overline{\mathbf{1}}$. gehört daher $\overline{\beta}$ zu $\overline{H}$.

b) Es sei $\beta \equiv 1 \bmod \overline{\mathfrak{f}}\,\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}}$. Dann ist jedenfalls $\beta \equiv 1 \bmod \overline{\mathfrak{f}}$, also β zu $\overline{H}$ gehörig, und daher nach $\overline{\mathbf{1}}$.:

$$\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1.$$

Weiter ist $\beta \equiv 1 \bmod \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}}$, also β selbst als Hilfszahl zur Bildung des Normenrestsymbols $\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right)$ geeignet, und dabei $\mathfrak{b} = \beta$. Es ist somit:

$$\left(\frac{K}{\beta}\right) = \left(\frac{K}{\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1.$$

Nach **1.** gehört daher β zu H.

Beweis des Anordnungs- und Eindeutigkeitssatzes $\overline{4}$.

Daß aus $\overline{K} \geqq \overline{K}'$ folgt $\overline{H} \leqq \overline{H}'$ ist unmittelbar klar nach der Definition der zugeordneten Idealgruppen in $\overline{k}$.

Zum Beweise der Umkehrung betrachte ich das Kompositum KK'. Nach N. R., Satz 8 gilt dafür folgender Sachverhalt:

Setzt man fest, daß die Substitutionen der Galoisschen Gruppen $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'$ von K/k, K'/k jeweils den anderen Körper K', K elementweise invariant lassen sollen, so

ist die Galoissche Gruppe von KK'/k eine gewisse Untergruppe des direkten Produkts $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$. Dabei gilt:

$$\left(\frac{\bar{\beta}, KK'}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\bar{\beta}, K}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\bar{\beta}, K'}{\mathfrak{p}}\right),$$

und also zufolge der Direktheit des Produktes:

(1) Es ist $\left(\frac{\bar{\beta}_1, KK'}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\bar{\beta}_2, KK'}{\mathfrak{p}}\right)$ dann und nur dann, wenn $\left(\frac{\bar{\beta}_1, K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\bar{\beta}_2, K}{\mathfrak{p}}\right)$ und $\left(\frac{\bar{\beta}_1, K'}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\bar{\beta}_2, K'}{\mathfrak{p}}\right)$ ist.

Wird nun $\bar{H} \leqq \bar{H}'$ vorausgesetzt, so ist nach **1.** immer, wenn $\left(\frac{\bar{\beta}, K}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ ist, auch $\left(\frac{\bar{\beta}, K'}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, und daher gilt allgemein:

(2) Aus $\left(\frac{\bar{\beta}_1, K}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\bar{\beta}_2, K}{\mathfrak{p}}\right)$ folgt $\left(\frac{\bar{\beta}_1, K'}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\bar{\beta}_2, K'}{\mathfrak{p}}\right)$.

Aus (1) und (2) ergibt sich, daß das Symbol $\left(\frac{\bar{\beta}, KK'}{\mathfrak{p}}\right)$, wenn $\bar{\beta}$ die Gruppe $\bar{A}$ durchläuft, nur ebensoviele verschiedene Werte annimmt, wie das Symbol $\left(\frac{\bar{\beta}, K}{\mathfrak{p}}\right)$. Daraus folgt (nach N. R., Zusatz zu Satz 5), daß die Zerlegungsgruppe zu $\mathfrak{p}$ für KK'/k nur ebendieselbe Ordnung hat, wie die Zerlegungsgruppe zu $\mathfrak{p}$ für K/k. Bezeichnet ferner $\overline{KK'}$ den Grenzkörper zu KK' bezgl. eines Primteilers von $\mathfrak{p}$, so folgt weiter, daß $\overline{KK'}/k$ nur ebendenselben Grad hat, wie $\overline{K}/\bar{k}$. Da aber $\overline{KK'} \geqq \overline{K}\,\overline{K'}$ ist [1]), so folgt schließlich $\overline{K}\,\overline{K'} = \overline{K}$, d. h. in der Tat $\overline{K} \geqq \overline{K'}$.

Beweis des Satzes 5.

a) Ist $\overline{H}$ die $\overline{K}$ zugeordnete Zahlgruppe in $\bar{k}$ so ist $\bar{\sigma}\,\overline{H}$ die $\bar{\sigma}\,\overline{K}$ zugeordnete Zahlgruppe in $\bar{k}$. Nach dem Eindeutigkeitssatz ist also $\bar{\sigma}\,\overline{H} = \overline{H}$ dann und nur dann, wenn $\bar{\sigma}\,\overline{K} = \overline{K}$, d. h. wenn $\overline{K}/\bar{k}_0$ Galoissch ist.

Die Anwendung des Eindeutigkeitssatzes ist im Rahmen der vorliegenden Arbeit gesichert, wenn vorausgesetzt wird, daß der Körper $\overline{K}/\bar{k}_0$ Grenzkörper eines Kör-

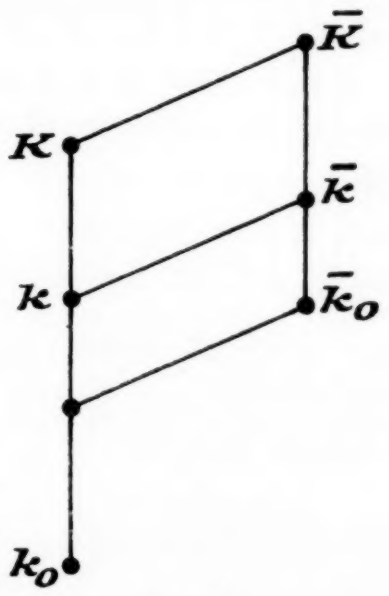

Fig. 4 a.

[1]) Da $\overline{K}\,\overline{K'}$ selbst perfekt ist, gilt sogar allgemein $\overline{KK'} = \overline{K}\,\overline{K'}$.

pers K/k_0 ist. Denn wenn dann k als Kernkörper zu $\bar{k}$ gewählt wird, also als Durchschnitt von K mit $\bar{k}$, so ist der Abelsche Körper $\overline{K}/\bar{k}$ Grenzkörper zum Abelschen Körper K/k.

b) Für das Folgende sei — ohne Einschränkung — der Kernkörper k_0 zu $\bar{k}_0$ möglichst umfassend, also als Durchschnitt von K mit $\bar{k}_0$ gewählt.

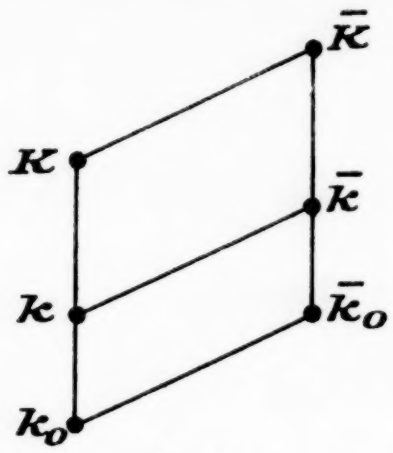

Fig. 4 b.

Es sei jetzt $\overline{K}/\bar{k}_0$ Galoissch, also $\bar{\sigma}\,\overline{K} = \overline{K}$ und $\bar{\sigma}\,\overline{H} = \overline{H}$ vorausgesetzt. Dann bezeichne wie bisher

$\overline{\mathfrak{G}}$ die Abelsche Galoissche Gruppe von $\overline{K}/\bar{k}$,

ferner

$\overline{\mathfrak{G}}_0$ die Galoissche Gruppe von $\overline{K}/\bar{k}_0$,

also

$\overline{\mathfrak{G}}_0/\overline{\mathfrak{G}}$ die zyklische Galoissche Gruppe von $\bar{k}/\bar{k}_0$.

Die erzeugende Substitution $\bar{\sigma}$ von $\overline{\mathfrak{G}}_0/\overline{\mathfrak{G}}$ kann durch eine Substitution $\bar{\sigma}_0$ aus $\overline{\mathfrak{G}}_0$ in der Form $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0\overline{\mathfrak{G}}$ dargestellt werden, und es ist dann $\overline{\mathfrak{G}}_0 = \{\bar{\sigma}_0, \overline{\mathfrak{G}}\}$.

Genau die gleichen Verhältnisse liegen, zufolge obiger Wahl von k und k_0, für die Körper K, k, k_0 vor. Es mögen demgemäß $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_0$, σ, σ_0 die entsprechende Bedeutung für diese Körper haben.

Die Klassen nach $\overline{H}$ werden nun, wenn $\bar{\beta}$ alle Zahlen aus $\overline{A}$ durchläuft, durch die Werte des Normenrestsymbols $\left(\frac{\bar{\beta}, K}{\mathfrak{p}}\right)$ repräsentiert, das dann alle Substitutionen aus $\mathfrak{G}$ durchläuft. Nach Wahl von k_0 und k hat das $\mathfrak{p}$ entsprechende Primideal $\mathfrak{p}_0$ von k_0 in k nur den einen Primteiler $\mathfrak{p}$. Dieser ist also bei σ invariant. Mittels N. R., Satz 6[1]) ergibt sich daher:

$$\left(\frac{\bar{\sigma}\bar{\beta}, K}{\mathfrak{p}}\right) = \sigma_0 \left(\frac{\bar{\beta}, K}{\mathfrak{p}}\right) \sigma_0^{-1}.$$

Das besagt aber, daß die Klassen nach $\overline{H}$ dann und nur dann bei $\bar{\sigma}$ invariant sind, wenn $\sigma_0 \tau \sigma_0^{-1} = \tau$ für jede Substitution τ aus $\mathfrak{G}$ gilt, d. h. wenn $\mathfrak{G}_0$ und somit K/k_0, oder also $\overline{\mathfrak{G}}_0$ und somit $\overline{K}/\bar{k}_0$ Abelsch sind.

[1]) Druckfehlerberichtigung: Der Satz in N. R., S. 139 unten soll die Nummer 6 (statt 9) tragen.

Halle, 16. März 1929.

Eingegangen 16. März 1929.

Zur Klassenkörpertheorie im Kleinen.

Von *Friedrich Karl Schmidt* in Erlangen.

Anknüpfend an die Theorie der Normenreste bezüglich eines Abelschen Zahlkörpers hat Herr *H. Hasse* vor kurzem damit begonnen, die Hauptsätze der Takagischen Klassenkörpertheorie auf Abelsche Körper über einem $\mathfrak{p}$-adischen Körper als Grundkörper zu übertragen und damit der bekannten Klassenkörpertheorie „im Großen" eine Klassenkörpertheorie „im Kleinen" gegenüberzustellen [1]). Herr Hasse formuliert zu diesem Zweck zu jedem Satz über Abelsche Erweiterungen eines endlichen algebraischen Zahlkörpers k einen entsprechenden Satz über Abelsche Erweiterungen eines $\mathfrak{p}$-adischen Körpers $\overline{k}$. Die Begründung der so entstehenden Klassenkörpertheorie im Kleinen läßt jedoch noch drei Wünsche offen.

Einmal werden nämlich alle Beweise nur unter einer einschränkenden Voraussetzung geführt, die Herr Hasse selbst mehrfach hervorhebt, und von der er vermutet, daß sie stets erfüllt, in Wahrheit also gar keine einschränkende Annahme sei. Ferner bleiben zwei der von Herrn Hasse angegebenen Sätze, der Abgrenzungssatz und der Existenzsatz, zunächst ganz ohne Beweis.

In der vorliegenden Arbeit werden die hieraus sich ergebenden Fragen sämtlich beantwortet. Es wird gezeigt, daß sich die Hasseschen Beweise durch Heranziehung Henselscher Resultate von jeder Einschränkung befreien lassen, ohne daß dazu die Allgemeingültigkeit des von Herrn Hasse als Voraussetzung eingeführten Sachverhalts bewiesen werden müßte. Es wird weiter die Richtigkeit des Abgrenzungs- und Existenzsatzes der Klassenkörpertheorie im Kleinen erhärtet. Endlich wird auch der erwähnte, von Herrn Hasse als Beweisvoraussetzung postulierte Satz hergeleitet, der trotz seiner Entbehrlichkeit für den Aufbau der Klassenkörpertheorie im Kleinen doch an sich von Interesse sein dürfte.

Hinsichtlich der benutzten Methode ist folgendes zu sagen. Nachdem die Hasseschen Beweise durch eine einfache Bemerkung auf den allgemeinsten Fall ausgedehnt sind, läßt sich der Abgrenzungssatz ohne jeden neuen Rückgriff auf die Klassenkörpertheorie im Großen durch rein algebraisch-gruppentheoretische Überlegungen begründen. Dagegen wird beim Beweis des Existenzsatzes der Klassenkörpertheorie im Kleinen die Existenz gewisser Abelscher Erweiterungen eines endlichen algebraischen Zahlkörpers benötigt, die ihrerseits auf Grund der Takagischen Theorie und zwar wesentlich mit transzendenten Hilfsmitteln hergeleitet wird. Ein genauer Überblick über die einzelnen Beweismittel sowie der Wortlaut der Hauptsätze aus der Klassenkörpertheorie im Kleinen ist in § 1 enthalten, in dem zugleich die wichtigsten Bezeichnungen zusammengestellt sind.

[1]) *H. Hasse*, Die Normenresttheorie relativ-Abelscher Zahlkörper als Klassenkörpertheorie im Kleinen, Journ. f. d. r. u. a. Math. **162** (1930), S. 145—154. Im folgenden kurz mit H. zitiert. — Diese Arbeit war mir durch die Freundlichkeit des Verfassers im Manuskript zugänglich. Ich schließe mich in den Bezeichnungen möglichst an sie an, ohne jedoch ihre Kenntnis vorauszusetzen.

§ 1. Hauptsätze der Klassenkörpertheorie im Kleinen. Bezeichnungen.

Es sei k ein endlicher algebraischer Zahlkörper, $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus k, $\overline{k}$ die Henselsche $\mathfrak{p}$-adische Erweiterung von k. Unter $\overline{A}$ werde die Gruppe aller Zahlen $\neq 0$ aus $\overline{k}$ verstanden.

Im Integritätsbereich aller $\mathfrak{p}$-adisch ganzen Zahlen aus $\overline{k}$ ist bekanntlich jedes Ideal Potenz eines festen Primideals, welches in der Henselschen Theorie einfach wieder mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet wird, weil sein Durchschnitt mit k genau das ursprüngliche Primideal $\mathfrak{p}$ ist, und weil der Restklassenring nach jeder seiner Potenzen dem Restklassenring nach der entsprechenden Potenz von $\mathfrak{p}$ in k isomorph ist. In einem endlichen Oberkörper $\overline{K}/\overline{k}$ wird $\mathfrak{p}$ stets gleich der Potenz eines Primideals $\mathfrak{P}$. Für einen Normalkörper $\overline{K}/\overline{k}$ kann man insbesondere die zu diesem Primteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ gehörige Trägheits- bzw. Verzweigungsgruppe ebenso wie in der Hilbertschen Theorie erklären. Wir nennen diese Gruppen im folgenden kurz die Trägheits- bzw. Verzweigungsgruppe von $\overline{K}/\overline{k}$.

Zu einem beliebigen endlichen Oberkörper $\overline{K}/\overline{k}$ wird die $\overline{K}/\overline{k}$ in $\overline{k}$ zugeordnete Zahlgruppe $\overline{H}$ definiert als Gruppe aller Zahlen aus $\overline{A}$, die Normen von Zahlen aus $\overline{K}/\overline{k}$ sind. Es gibt stets eine endliche Potenz $\mathfrak{p}^s$ von $\mathfrak{p}$, so daß der Strahl $\overline{S}_s$ aller Zahlen aus $\overline{k}$, die $\equiv 1\ (\mathfrak{p}^s)$ sind [2]), zu $\overline{H}$ gehört. Die niedrigste Potenz von $\mathfrak{p}$ dieser Art heißt der Führer der Gruppe $\overline{H}$ [3]).

Für Abelsche Körper $\overline{K}/\overline{k}$ formuliert nun Herr Hasse folgende Sätze, die das Gegenstück zur Takagischen Theorie eines Abelschen Körpers K/k darstellen [4]).

1. *Die Galoissche Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\overline{K}/\overline{k}$ ist isomorph zur Klassengruppe $\overline{A}/\overline{H}$.*

2. *Es gibt eine isomorphe Abbildung von $\overline{\mathfrak{G}}$ auf $\overline{A}/\overline{H}$, bei der jeder Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}}'$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ die Untergruppe $\overline{H}'/\overline{H}$ entspricht, welche man erhält, indem man zunächst den zu $\overline{\mathfrak{G}}'$ im Sinne der Galoisschen Theorie gehörigen Unterkörper $\overline{K}'$ von $\overline{K}/\overline{k}$ und dann die $\overline{K}'/\overline{k}$ in $\overline{k}$ zugeordnete Zahlgruppe $\overline{H}'$ aufsucht.*

1. und **2.** werden zusammengefaßt als Isomorphiesatz.

3. *Auf die in* **2.** *beschriebene Art ist zugeordnet: der Trägheitsgruppe $\overline{\mathfrak{G}}_T$ die engste $\overline{H}$ enthaltende Zahlgruppe $\overline{H}_T$ vom Führer $\mathfrak{p}^0$.*

Ist e der Index von $\overline{H}$ in $\overline{H}_T$ und f der Index von $\overline{H}_T$ in $\overline{A}$, so hat der Primteiler $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{p}$ in $\overline{K}$ die Ordnung e und den Grad f bezüglich $\mathfrak{p}$.

4. (Anordnungs- und Eindeutigkeitssatz.) *Es bedeute $\overline{H}'$ die dem Abelschen Körper $\overline{K}'/\overline{k}$ in $\overline{k}$ zugeordnete Zahlgruppe. Dann gilt:*

Die Relationen

$$\overline{K} \geqq \overline{K}' \quad \text{und} \quad \overline{H} \leqq \overline{H}',$$

insbesondere also die Relationen

$$\overline{K} = \overline{K}' \quad \text{und} \quad \overline{H} = \overline{H}'$$

bedingen sich gegenseitig.

5. *Es sei $\overline{k}/\overline{k}_0$ zyklisch und σ eine erzeugende Substitution der Galoisgruppe von $\overline{k}/\overline{k}_0$. Dann gilt:*

---

[2]) Unter dem Strahl $\overline{S}_0$ versteht man insbesondere die Gruppe aller zu $\mathfrak{p}$ primen Zahlen aus $\overline{k}$.

[3]) Vgl. zu diesem Absatz H., S. 146. Man sagt insbesondere, $\overline{H}$ besitze den Führer $\mathfrak{p}^0$, wenn der Strahl $\overline{S}_0$ in $\overline{H}$ enthalten ist.

[4]) Vgl. H., S. 147—149.

a) *Dann und nur dann, wenn* $\overline{K}/\overline{k}_0$ *Galoissch ist, ist* $\overline{H}$ *bei* σ *invariant.*

b) *Dann und nur dann, wenn* $\overline{K}/\overline{k}_0$ *sogar Abelsch ist, sind sogar die Klassen nach* $\overline{H}$ *bei* σ *invariant.*

$\overline{6}$. (Abgrenzungssatz.) *Ist* $\overline{K}/\overline{k}$ *nicht Abelsch, so ist der Index* $(\overline{A} : \overline{H})$ *der* $\overline{K}/\overline{k}$ *in* $\overline{k}$ *zugeordneten Zahlgruppe* $\overline{H}$ *kleiner als der Grad von* $\overline{K}/\overline{k}$.

$\overline{7}$. (Existenzsatz.) *Zu jeder Zahlgruppe* $\overline{H}$ *in* $\overline{k}$, *deren Führer eine endliche Potenz von* $\mathfrak{p}$ *ist, und die nicht nur aus zu* $\mathfrak{p}$ *primen Zahlen besteht, existiert ein Abelscher Körper* $\overline{K}/\overline{k}$, *dessen zugeordnete Zahlgruppe in* $\overline{k}$ *gerade* $\overline{H}$ *ist.*

Von den vorstehenden Sätzen werden in der Hasseschen Arbeit **$\overline{1}$.** — **$\overline{5}$.** mit einer Einschränkung bewiesen, Satz **$\overline{6}$.** und **$\overline{7}$.** dagegen ohne Beweise ausgesprochen.

Die beim Beweis von **$\overline{1}$.** — **$\overline{5}$.** von Herrn Hasse benutzte engere Voraussetzung besteht in der Annahme, es existiere zu dem Abelschen Körper $\overline{K}/\overline{k}$ ein Abelscher Körper K/k, so daß $\overline{K} = \overline{k}K$ ist. Herr Hasse vermutet, daß dies in Wirklichkeit immer der Fall sei, daß also allgemein der Satz gilt:

$\overline{8}$. *Zu jedem Abelschen Körper* $\overline{K}/\overline{k}$ *gibt es einen Abelschen Körper* K/k, *so daß* $\overline{K} = \overline{k}K$ *ist.*

Kurz: Jeder Abelsche Körper $\overline{K}/\overline{k}$ *kann aus* $\overline{k}$ *durch einen Abelschen Körper* K/k *erzeugt werden.*

In § 2 des vorliegenden Aufsatzes wird zunächst gezeigt, daß man die Hasseschen Beweise für **$\overline{1}$.** — **$\overline{5}$.** zu voller Allgemeingültigkeit erheben kann, indem man aus Henselschen Resultaten eine weit schwächere Behauptung herleitet, als in **$\overline{8}$.** ausgesagt wird. In § 3 wird darauf der Abgrenzungssatz in folgender verschärfter Fassung bewiesen. Eine entsprechende Verschärfung des Abgrenzungssatzes ist bisher für die Klassenkörpertheorie im Großen nicht ausdrücklich formuliert worden; sie gilt aber auch dort und kann dort sehr einfach aus einem bekannten *Bauer*schen Satz gefolgert werden, worauf mich Herr Hasse nachträglich aufmerksam machte [4a]).

$\overline{6}'$. (Verschärfter Abgrenzungssatz.) *Der Index* $(\overline{A} : \overline{H})$ *der einer beliebigen Erweiterung* $\overline{K}/\overline{k}$ *zugeordneten Zahlgruppe* $\overline{H}$ *in* $\overline{k}$ *ist stets Teiler des Grades* $(\overline{K} : \overline{k})$.

Ist $(\overline{A} : \overline{H}) = (\overline{K} : \overline{k})$, *so ist* $\overline{K}/\overline{k}$ *Abelsch.*

$\overline{6}'$. wird auf Grund von **$\overline{1}$.** und **$\overline{5}$.** durch rein gruppentheoretische Schlüsse gewonnen. Wir benutzen nämlich wesentlich den Umstand, daß jeder Normalkörper über einem $\mathfrak{p}$-adischen Körper nach *Hensel*schen Ergebnissen eine auflösbare Gruppe besitzt [5]), und ziehen dann die Sylowschen Sätze sowie bekannte Aussagen über primitive, auflösbare Permutationsgruppen heran.

Dagegen wird der Beweis des Existenzsatzes **$\overline{7}$.** zunächst in § 4 mit transzendenten Hilfsmitteln durch einen Satz über Abelsche Erweiterungen von k vorbereitet. Es handelt sich hier um die Tatsache, daß man aus der Menge derjenigen Klassenkörper über k, deren zugehörige Klassengruppe einen genau durch $\mathfrak{p}^e$ teilbaren Führer hat, stets gewisse „maximale“ Körper herausgreifen kann. Diese „maximalen“ Körper

---

[4a]) Die Bedeutung des hier gemeinten Bauerschen Satzes für die Takagische Klassenkörpertheorie ist kürzlich von Herrn Hasse in einer besonderen Arbeit behandelt worden. Vgl. *H. Hasse*, Ein Satz über relativ-Galoische Zahlkörper und seine Anwendung auf relativ-Abelsche Zahlkörper, Math. Ztschr. **31** (1930), S. 559—564.

[5]) Vgl. etwa *K. Hensel*, Eine neue Theorie der algebraischen Zahlen, Math. Ztschr. **2** (1918), S. 433—452, Abschnitt IV.

stehen in Analogie zum Strahlklassenkörper mod. p^e über dem Körper der rationalen Zahlen, also zu dem Körper der p^e-ten Einheitswurzeln, sind jedoch im allgemeinen vom Strahlklassenkörper mod. $\mathfrak{p}^e$ über k verschieden.

Der Beweis von $\overline{7}$. und $\overline{8}$. ist in § 5 und § 6 enthalten, und zwar wird $\overline{8}$. unmittelbar aus Sätzen der Klassenkörpertheorie im Kleinen, insbesondere aus einer Erweiterung des Existenzsatzes gefolgert.

§ 2. Uneingeschränkter Beweis von $\overline{1}. - \overline{5}.$

1. Wir zeigen: *Die Hasseschen Beweise zu* $\overline{1}. - \overline{5}.$ *gelten für den Abelschen Körper* $\overline{K}/\overline{k}$, *wenn man aus* $\overline{k}/k$ *eine endliche Erweiterung* k_1/k *und aus* $\overline{K}$ *einen endlichen Abelschen Körper* K_1/k_1 *herausgreifen kann, so daß* $\overline{K} = \overline{k}\,K_1$ *ist.*

Versteht man nämlich unter $\overline{k}_1$ eine Henselsche $\mathfrak{p}_1$-adische Erweiterung von k_1 und setzt $\overline{K}_1 = \overline{k}_1 K_1$, so ist für den Abelschen Körper $\overline{K}_1/\overline{k}_1$ die von Herrn Hasse beim Beweis von $\overline{1}. - \overline{5}.$ benutzte einschränkende Voraussetzung offenbar erfüllt, d. h. für $\overline{K}_1/\overline{k}_1$ gelten sicher die Sätze $\overline{1}. - \overline{5}.$ Nun ist aber $\overline{k}_1 = \overline{k}$ eine $\mathfrak{p}_1$-adische Erweiterung von k_1, weil k_1/k in $\overline{k}/k$ enthalten ist. Wegen $\overline{K} = \overline{k}\,K_1$ ist dann weiter $\overline{K}_1 = \overline{K}$ und die Sätze $\overline{1}. - \overline{5}.$ gelten somit für $\overline{K}/\overline{k}$.

2. Die Sätze $\overline{1}. - \overline{5}.$ sind also auf Grund der Hasseschen Ausführungen für jeden Abelschen Körper $\overline{K}/\overline{k}$ bewiesen, wenn wir dartun: *Zu jedem endlichen Abelschen Körper* $\overline{K}/\overline{k}$ *kann man einen Körper* k_1 *und einen Abelschen Körper* $\overline{K}_1/\overline{k}_1$ *der oben angegebenen Beschaffenheit bestimmen.*

Daß dies in der Tat möglich ist, ergibt sich aus Henselschen Sätzen. Herr *Hensel* zeigt nämlich [6]): Ein endlicher Oberkörper $\overline{K}^*/\overline{k}$ kann aus $\overline{k}$ stets durch Adjunktion einer Zahl α erzeugt werden, die Nullstelle eines über $\overline{k}$ irreduziblen Polynoms $G(x)$ mit Koeffizienten aus k ist. Wendet man das auf den Abelschen Körper $\overline{K}/\overline{k}$ an und bezeichnet mit $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sämtliche Nullstellen von $G(x)$, so besitzen die Körper $k_1 = k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \frown \overline{k}$ und $K_1 = k_1(\alpha_1)$ alle geforderten Eigenschaften, wie man unschwer folgendermaßen einsieht.

Es ist k_1/k jedenfalls eine in $\overline{k}$ enthaltene endliche algebraische Erweiterung von k und wegen $\overline{K} = \overline{k}(\alpha_1)$ ferner $\overline{K} = \overline{k}\,K_1$. Nach einem bekannten Satz der Galoisschen Theorie besitzt $G(x)$ über $\overline{k}$ und über $k_1 = k(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \frown \overline{k}$ dieselbe Galoisgruppe. Da $\overline{K} = \overline{k}(\alpha_1)$ über $\overline{k}$ Abelsch ist, ist daher auch $K_1 = k_1(\alpha_1)$ Abelsch über k_1.

3. Die soeben unter 2. sichergestellte Tatsache reicht, wie wir sahen, zum vollständigen Beweis von $\overline{1}. - \overline{5}.$ hin. Sie ist jedoch keineswegs mit Satz **8.** identisch, denn der Körper k_1, über dem K_1 Abelsch ist, ist im allgemeinen ein echter Oberkörper von k.

§ 3. Beweis des verschärften Abgrenzungssatzes $\overline{6}'$.

In diesem ganzen Paragraphen sind $\overline{K}_s$ $(s = 0, 1, \ldots)$ endliche Erweiterungen von $\overline{k}$, $\overline{A}_s$ bedeutet die Gruppe aller Zahlen $\neq 0$ aus $\overline{K}_s$, und $\overline{H}_s^{(t)}$ für $\overline{K}_t \geqq \overline{K}_s$ die $\overline{K}_t$ in $\overline{K}_s$ zugeordnete Zahlgruppe.

1. Satz $\overline{6}'$ gilt sicher für Abelsche Körper $\overline{K}/\overline{k}$, bei denen ja nach dem Isomorphiesatz $(\overline{A} : \overline{H}) = (\overline{K} : \overline{k})$ ist. Es liegt daher nahe, seine Gültigkeit zunächst auf solche

[6]) Siehe etwa *K. Hensel*, Theorie der algebraischen Zahlen, Leipzig 1908, Kap. VII, § 2.

Körper auszudehnen, die sich durch Übereinandertürmen Abelscher Körper aufbauen lassen. Das geschieht schrittweise durch die folgenden Bemerkungen, in denen zuerst der Fall von zwei, dann der Fall von beliebig vielen übereinandergeschachtelten Körpern behandelt wird. Zugleich wird durch diese Überlegungen der vollständige Beweis des Abgrenzungssatzes auf primitive Körper $\overline{K}/\overline{k}$ reduziert.

(M) (Multiplikationsregel.) *Ist* $\overline{K}_0 \leqq \overline{K}_1 \leqq \overline{K}_2$, *so ist* $(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(2)}) = (\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(1)})\, h'$, *wo* h' *Teiler von* $(\overline{A}_1 : \overline{H}_1^{(2)})$ *ist.*

Ist $\overline{K}_1/\overline{K}_0$ *zyklisch und* $\overline{K}_2/\overline{K}_1$ *Abelsch, so folgt aus* $(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(2)}) = (\overline{K}_2 : \overline{K}_0)$, *daß* $\overline{K}_2/\overline{K}_0$ *Abelsch ist.*

a) Da $\overline{H}_0^{(1)} \geqq \overline{H}_0^{(2)}$ ist, ist zunächst $(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(2)}) = (\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(1)})\,(\overline{H}_0^{(1)} : \overline{H}_0^{(2)})$. Ordnet man nun jeder Zahl aus $\overline{A}_1$ ihre in $\overline{K}_1/\overline{K}_0$ gebildete Norm zu, so erhält man einen Homomorphismus zwischen $\overline{A}_1$ und $\overline{H}_0^{(1)}$, bei dem der Untergruppe $\overline{H}_1^{(2)}$ von $\overline{A}_1$ die Untergruppe $\overline{H}_0^{(2)}$ von $\overline{H}_0^{(1)}$ zugeordnet ist. Bezeichnet $\overline{H}_1'$ die Gruppe aller Elemente, denen bei dem genannten Homomorphismus Zahlen aus $\overline{H}_0^{(2)}$ entsprechen, so sind $\overline{A}_1/\overline{H}_1'$ und $\overline{H}_0^{(1)}/\overline{H}_0^{(2)}$ isomorph. Es ist daher $(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(2)}) = (\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(1)})\,(\overline{A}_1 : \overline{H}_1')$, und wegen $\overline{H}_1' \geqq \overline{H}_1^{(2)}$ ist in $(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(2)}) = (\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(1)})\, h'$ die ganze Zahl h' wirklich Teiler von $(\overline{A}_1 : \overline{H}_1^{(2)})$.

b) Der zweite Teil von (M) ergibt sich einfach durch Anwendung von $\overline{5}$., sobald man zeigen kann, daß unter den hier gemachten Voraussetzungen jede Restklasse von $\overline{A}_1/\overline{H}_1^{(2)}$ einzeln gegenüber einer erzeugenden Substitution σ von $\overline{K}_1/\overline{K}_0$ invariant bleibt.

Nun gilt unter unseren Voraussetzungen für die Gruppen $\overline{H}_1' \geqq \overline{H}_1^{(2)}$ aus a) jedenfalls das Gleichheitszeichen, $\overline{H}_1' = \overline{H}_1^{(2)}$; denn einmal ist für den Abelschen Körper $\overline{K}_2/\overline{K}_1$ $(\overline{A}_1 : \overline{H}_1^{(2)}) = (\overline{K}_2 : \overline{K}_1)$, andererseits liefert die Gleichung $(\overline{A}_1 : \overline{H}_1') = \dfrac{(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(2)})}{(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(1)})}$ wegen $(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(2)}) = (\overline{K}_2 : \overline{K}_0)$ und $(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(1)}) = (\overline{K}_1 : \overline{K}_0)$ ebenfalls $(\overline{A}_1 : \overline{H}_1') = (\overline{K}_2 : \overline{K}_1)$.

Durch Normenbildung in $\overline{K}_1/\overline{K}_0$ wird also bereits die Gruppe $\overline{A}_1/\overline{H}_1^{(2)}$ selbst eineindeutig auf die Gruppe $\overline{H}_0^{(1)}/\overline{H}_0^{(2)}$ abgebildet, d. h. in einer Restklasse von $\overline{A}_1/\overline{H}_1^{(2)}$ liegen alle und nur die Zahlen α aus $\overline{A}_1$, deren Normen in dieselbe Restklasse von $\overline{H}_0^{(1)}/\overline{H}_0^{(2)}$ fallen. Da $N\alpha = N\sigma(\alpha)$ ist, wenn N die Norm in $\overline{K}_1/\overline{K}_0$ bedeutet, befinden sich somit α und $\sigma(\alpha)$ stets in derselben Restklasse von $\overline{A}_1/\overline{H}_1^{(2)}$, d. h. jede Restklasse von $\overline{A}_1/\overline{H}_1^{(2)}$ bleibt gegenüber σ invariant.

(K) (Kettenregel.) *Läßt sich von* $\overline{k}$ *nach* $\overline{K}$ *eine Körperkette*

$$\overline{k} = \overline{K}_0 \leqq \overline{K}_1 \leqq \overline{K}_2 \leqq \cdots \leqq \overline{K}_n = \overline{K} \tag{1}$$

ziehen, bei der der Abgrenzungssatz $\overline{6}'$. *für je zwei aufeinanderfolgende Körper* $\overline{K}_i/\overline{K}_{i-1}$ *gilt, so ist der Abgrenzungssatz* $\overline{6}'$. *auch für* $\overline{K}/\overline{k}$ *richtig.*

a) Indem man die Kette (1) von $\overline{k}$ nach $\overline{K}$ aufsteigend durchläuft, findet man auf Grund von (M), daß $(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(n)})$ Teiler von $(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(1)})\,(\overline{A}_1 : \overline{H}_1^{(2)}) \cdots (\overline{A}_{n-1} : \overline{H}_{n-1}^{(n)})$ ist. Nach Voraussetzung ist aber $(\overline{A}_{i-1} : \overline{H}_{i-1}^{(i)})$ Teiler von $(\overline{K}_i : \overline{K}_{i-1})$, also sicher $(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(n)})$ Teiler von $(\overline{K}_n : \overline{K}_0)$. Damit ist der erste Teil des Abgrenzungssatzes $\overline{6}'$. für $\overline{K}_n/\overline{K}_0$ bewiesen.

b) Bevor wir den zweiten Teil des Abgrenzungssatzes $\overline{6}'$. für $\overline{K}_n/\overline{K}_0$ herleiten, schicken wir noch eine einfache Überlegung voraus. Die Voraussetzungen von (K) sind

offenbar auch für jedes Körperpaar $\overline{K}_t/\overline{K}_s$ mit $t > s$ der Kette (1) erfüllt. Nach a) gilt der erste Teil des Abgrenzungssatzes somit für jedes derartige Körperpaar, d. h. es ist $(\overline{A}_s : \overline{H}_s^{(t)})$ stets Teiler von $(\overline{K}_t : \overline{K}_s)$. Ist nun für ein Körperpaar $\overline{K}_t/\overline{K}_s$ $(\overline{A}_s : \overline{H}_s^{(t)})$ echter Teiler von $(\overline{K}_t : \overline{K}_s)$, so ist auch $(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(n)})$ echter Teiler von $(\overline{K}_n : \overline{K}_0)$; denn zweimalige Anwendung von (M) auf die aufsteigend durchlaufende Körperkette $\overline{K}_0 \leqq \overline{K}_s \leqq \overline{K}_t \leqq \overline{K}_n$ ergibt, daß $(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(n)})$ Teiler von $(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(s)})$ $(\overline{A}_s : \overline{H}_s^{(t)})$ $(\overline{A}_t : \overline{H}_t^{(n)})$ ist.

Sei nun $(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(n)}) = (\overline{K}_n : \overline{K}_0)$. Dann ist nach dem Vorstehenden für jedes Körperpaar $\overline{K}_t/\overline{K}_s$ $(\overline{A}_s : \overline{H}_s^{(t)}) = (\overline{K}_t : \overline{K}_s)$. Insbesondere ist $(\overline{A}_{i-1} : \overline{H}_{i-1}^{(i)}) = (\overline{K}_i : \overline{K}_{i-1})$. Da nach Voraussetzung für zwei aufeinanderfolgende Körper der Kette der Abgrenzungssatz **6.** richtig ist, ist also $\overline{K}_i/\overline{K}_{i-1}$ Abelsch.

Man kann daher aus der Kette (1) eine von $\overline{k}$ nach $\overline{K}$ gezogene Kette gewinnen, bei der jeder Körper über dem vorhergehenden zyklisch ist, indem man nur jeweils zwischen $\overline{K}_{i-1}$ und $\overline{K}_i$ nötigenfalls weitere Zwischenkörper einschiebt. Bei einer solchen Kette ist jedenfalls der Abgrenzungssatz für zwei aufeinanderfolgende Körper gültig; wir können somit annehmen, daß (1) bereits eine Kette dieser Art sei. Durchläuft man dann die Kette von $\overline{K}$ nach $\overline{k}$ absteigend und beachtet, daß stets $(\overline{A}_i : \overline{H}_i^{(n)}) = (\overline{K}_n : \overline{K}_i)$ ist, so findet man durch Anwendung des zweiten Teils von (M) schrittweise: Es ist $\overline{K}_n/\overline{K}_{n-2}$, $\overline{K}_n/\overline{K}_{n-3}$, . . ., $\overline{K}_n/\overline{K}_0$ Abelsch.

Aus (K) folgt unmittelbar:

(K_A) *Läßt sich von $\overline{k}$ nach $\overline{K}$ eine Körperkette ziehen, bei der jeder Körper Abelsch über dem vorhergehenden ist, so gilt der Abgrenzungssatz* **6'.** *für $\overline{K}/\overline{k}$.*

2. Auf Grund von (K) genügt es, nunmehr den Abgrenzungssatz für primitive Körper $\overline{K}/\overline{k}$ herzuleiten. Vor Behandlung dieses Falls erwähnen wir noch die folgende einfache Tatsache:

(T) (Teilbarkeitsregel.) *Der Index $(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(1)})$ der $\overline{K}_1/\overline{K}_0$ in $\overline{K}_0$ zugeordneten Zahlgruppe $\overline{H}_0^{(1)}$ ist allgemein nur durch solche Primzahlen teilbar, die im Grad n von $\overline{K}_1/\overline{K}_0$ aufgehen.*

Das folgt unmittelbar daraus, daß die n-te Potenz jeder Zahl aus $\overline{A}_0$ in $\overline{H}_0^{(1)}$ liegt, also die Ordnung jedes Elements der Gruppe $\overline{A}_0/\overline{H}_0^{(1)}$ Teiler von n ist.

Wir beweisen nun:

(P) *Der Abgrenzungssatz* **6.** *gilt für jeden primitiven Körper $\overline{K}_1/\overline{K}_0$.*

a) Es sei $\overline{N}/\overline{K}_0$ der kleinste $\overline{K}_1/\overline{K}_0$ enthaltende Normalkörper, $\overline{\mathfrak{G}}_0$ die Gruppe von $\overline{N}/\overline{K}_0$. Unter unserer Voraussetzung über $\overline{K}_1/\overline{K}_0$ kann $\overline{\mathfrak{G}}_0$ als primitive Permutationsgruppe vom Grade $(\overline{K}_1 : \overline{K}_0)$ dargestellt werden. Andererseits ist $\overline{\mathfrak{G}}_0$ auflösbar, weil jeder Normalkörper über einem $\mathfrak{p}$-adischen Körper nach Henselschen Resultaten [5]) eine auflösbare Gruppe besitzt. Da eine primitive, auflösbare Permutationsgruppe von Primzahlpotenzgrad ist, muß $(\overline{K}_1 : \overline{K}_0)$ Potenz einer Primzahl q sein, $(\overline{K}_1 : \overline{K}_0) = q^n$. Auf Grund von (T) schließt man daraus sofort, daß auch $(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(1)})$ gleich einer Potenz q^m von q ist.

$\overline{\mathfrak{G}}_q$ bezeichne eine zu q gehörige Sylowgruppe von $\overline{\mathfrak{G}}_0$, $\overline{K}_q$ den $\overline{\mathfrak{G}}_q$ im Sinne der Galoisschen Theorie zugeordneten Unterkörper von $\overline{N}/\overline{K}_0$. Dann ist $(\overline{K}_q : \overline{K}_0) = (\overline{\mathfrak{G}}_0 : \overline{\mathfrak{G}}_q)$ prim zu q und daher $\overline{K}_q\,\overline{K}_1 = \overline{K}_{q+1}$ vom Grad q^n über $\overline{K}_q$. Wir zeigen:

Für $\overline{K}_{q+1}/\overline{K}_q$ gilt der Abgrenzungssatz.

In der Tat, $\overline{\mathfrak{G}}_q$ ist Galoisgruppe von $\overline{N}/\overline{K}_q$ und besitzt als Gruppe von Primzahl-

potenzordnung stets eine Kompositionsreihe, die eine vorgegebene Untergruppe enthält. Insbesondere kann man also von $\overline{\mathfrak{G}}_q$ aus eine Kompositionsreihe nach der dem Körper $\overline{K}_{q+1}$ in $\overline{N}/\overline{K}_q$ zugeordneten Untergruppe ziehen. Einer solchen Kompositionsreihe entspricht dann eine von $\overline{K}_q$ nach $\overline{K}_{q+1}$ laufende Körperkette, bei der jeder Körper zyklisch über dem vorhergehenden ist. Nach (K_A) gilt daher für $\overline{K}_{q+1}/\overline{K}_q$ der Abgrenzungssatz, d. h. es ist $(\overline{A}_q : \overline{H}_q^{(q+1)}) = q^{m'}$ mit $m' \leqq n$.

Um $q^m \leqq q^n$ nachzuweisen, bestimmen wir nun für $\overline{K}_{q+1}/\overline{K}_0$ den Index $(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(q+1)})$ auf zwei verschiedene Weisen, indem wir nämlich

α) die Kette $\overline{K}_0 < \overline{K}_1 \leqq \overline{K}_{q+1}$,

β) die Kette $\overline{K}_0 \leqq \overline{K}_q < \overline{K}_{q+1}$

benutzen. Das ergibt nach (M)

α) $\qquad (\overline{A}_0 : \overline{H}_q^{(q+1)}) = (\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(1)})\, h' = q^m h' \quad (h' \text{ ganze Zahl})$

β) $\qquad (\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(q+1)}) = (\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(q)})\, q^{m''} = h q^{m''}$,

wo $m'' \leqq m' \leqq n$ und $h = (\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(q)})$ nach (T) prim zu q ist, weil das gleiche von $(\overline{K}_q : \overline{K}_0)$ gilt.

Es besteht also die Gleichung

(2) $\qquad q^m h' = h q^{m''}, (h, q) = 1, m'' \leqq m' \leqq n,$

aus der unmittelbar folgt: q^m ist stets Teiler von q^n.

b) Sei jetzt $q^m = q^n$. Dann ist nach (2) $m' = n$, und da für $\overline{K}_{q+1}/\overline{K}_q$ der Abgrenzungssatz **6′.** gilt, ist $\overline{K}_{q+1}/\overline{K}_q$ Abelsch.

Der zweite Teil des Abgrenzungssatzes **6′.** ist daher für $\overline{K}_1/\overline{K}_0$ bewiesen, sobald wir feststellen, daß unter unseren gegenwärtigen Voraussetzungen $\overline{K}_q = \overline{K}_0$ ist, denn dann ist $\overline{K}_{q+1} = \overline{K}_1$ und $\overline{K}_1/\overline{K}_0$ Abelsch.

Zu diesem Zwecke überlegen wir zunächst, daß $\overline{K}_q/\overline{K}_0$ Normalkörper ist. Das schließt man so. Da $\overline{K}_{q+1}/\overline{K}_q$ Abelsch ist und $\overline{K}_{q+1} = \overline{K}_q\overline{K}_1$ über $\overline{K}_q$ den Grad $q^n = (\overline{K}_1 : \overline{K}_0)$ behält, ist zufolge der Definition von $\overline{N}$ notwendig $\overline{N} = \overline{K}_{q+1}$. Die Sylowgruppe $\overline{\mathfrak{G}}_q$ von $\overline{\mathfrak{G}}_0$ besitzt also die Ordnung $(\overline{N} : \overline{K}_q) = (\overline{K}_{q+1} : \overline{K}_q) = q^n$. Andererseits enthält $\overline{\mathfrak{G}}_0$ als primitive, auflösbare Permutationsgruppe vom Grade q^n einen Normalteiler der Ordnung q^n, der somit ebenfalls Sylowgruppe und daher mit $\overline{\mathfrak{G}}_q$ identisch ist, weil ja zwei Sylowgruppen stets konjugiert sind. $\overline{\mathfrak{G}}_q$ ist mithin Normalteiler von $\overline{\mathfrak{G}}_0$ und $\overline{K}_q/\overline{K}_0$ wirklich Normalkörper.

Sei nun $\overline{K}_u$ ein Unterkörper von $\overline{K}_q/\overline{K}_0$, über dem $\overline{K}_q$ zyklisch ist. Dann besitzt jedenfalls $\overline{K}_u K_1 = \overline{K}_{u+1}$ wieder den Grad q^n über $\overline{K}_u$. Wir werden darüber hinaus zeigen, daß stets $\overline{K}_{u+1}/\overline{K}_u$ Abelsch ist, und können dann ähnlich wie oben sogleich folgern $\overline{N} = \overline{K}_{u+1}$, also $(\overline{N} : \overline{K}_u) = (\overline{N} : \overline{K}_q) = q^n$ und mithin $\overline{K}_u = \overline{K}_q$. Der Galoiskörper $\overline{K}_q/\overline{K}_0$ stimmt demnach mit jedem Unterkörper $\overline{K}_u$, für den $\overline{K}_q/\overline{K}_u$ zyklisch ist, überein, d. h. $\overline{K}_q = \overline{K}_0$.

Um $\overline{K}_{u+1}/\overline{K}_u$ als Abelsch nachzuweisen, verschärfen wir die Bestimmung von $(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{q+1})$ in a) β) dadurch, daß wir zwischen $\overline{K}_0$ und $\overline{K}_q$ noch den Körper $\overline{K}_u$ einschieben, also die Kette $\overline{K}_0 \leqq \overline{K}_u \leqq \overline{K}_q < \overline{K}_{q+1}$ benützen. Da $\overline{K}_q/\overline{K}_u$ zyklisch ist, findet man zunächst:

$$(\overline{A}_u : \overline{H}_u^{(q+1)}) = (\overline{A}_u : \overline{H}_u^{(q)})\, q^{\overline{m}'} = (\overline{K}_q : \overline{K}_u)\, q^{\overline{m}'}, \quad (\overline{m}' \leqq n)$$

und hieraus nach (M) weiter:

$$(\overline{A}_0 : H_0^{(q+1)}) = (\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(u)})\, \bar{h}\, q^{\overline{m}''} = \bar{h}'\, q^{\overline{m}''},\ (\bar{h}', q) = 1,\quad \overline{m}'' \leqq \overline{m}' \leqq n.$$

Zusammen mit der durch a) α) gelieferten Bestimmung von $(\overline{A}_0 : \overline{H}_0^{(q+1)})$ ergibt das die Gleichung

$$q^m h' = \bar{h}'\, q^{\overline{m}''},\quad (\bar{h}', q) = 1,\qquad \overline{m}'' \leqq \overline{m}' \leqq n,$$

aus der wegen $q^m = q^n$ folgt: Es ist $\overline{m}' = n$, d. h.

$$(\overline{A}_u : \overline{H}_u^{(q+1)}) = (\overline{K}_q : \overline{K}_u)\, q^n = (\overline{K}_{q+1} : \overline{K}_u)$$

und mithin $(\overline{K}_{q+1}/\overline{K}_u)$ nach (M) Abelsch. Der Körper $\overline{K}_{u+1}/\overline{K}_u$ ist demnach als Unterkörper eines Abelschen Körpers selbst Abelsch.

§ 4. Ein Existenztheorem aus der Theorie der Abelschen Erweiterungen eines endlichen algebraischen Zahlkörpers.

1. Alle in diesem Paragraphen auftretenden Erweiterungen von k sind endlich. Ist m eine natürliche Zahl, so bezeichnet k_m den Körper, der aus k durch Adjunktion einer primitiven m-ten Einheitswurzel hervorgeht.

p bedeute die in $\mathfrak{p}$ liegende natürliche Primzahl, $\Phi(\mathfrak{a})$ die Zahl der zu $\mathfrak{a}$ primen Restklassen nach dem Ideal $\mathfrak{a}$ in k und $\Psi(\mathfrak{a})$ das Produkt aller verschiedenen in $\Phi(\mathfrak{a})$ aufgehenden natürlichen Primzahlen bzw. das Doppelte dieses Produktes, wenn $\Phi(\mathfrak{a})$ durch 4 teilbar ist.

Unter dem Führer eines Abelschen Körpers K/k verstehen wir den Führer[7]) der K/k in k zugeordneten Idealgruppe, unter dem $\mathfrak{p}$-Führer von K/k nach Hasse die höchste Potenz von $\mathfrak{p}$, die im Führer von K/k aufgeht.

Es handelt sich um den

Satz. *Ist L/k ein Abelscher Körper, mit dem $\mathfrak{p}$-Führer $\mathfrak{p}^e$, so hat L über dem Trägheitskörper L_T der Primteiler von $\mathfrak{p}$ in L/k höchstens den Grad $\Phi(\mathfrak{p}^e)$, $(L : L_T) \leqq \Phi(\mathfrak{p}^e)$.*

Es existiert stets ein Abelscher Körper L/k mit dem $\mathfrak{p}$-Führer $\mathfrak{p}^e$, für den $(L : L_T) = \Phi(\mathfrak{p}^e)$ ist.

Die Bedeutung dieses Satzes für unsere späteren Überlegungen liegt in der Existenzaussage des zweiten Teils. Ist k der Körper der rationalen Zahlen, so ist diese Existenzaussage trivial, da dann der Körper der p^e-ten Einheitswurzeln die geforderte Beschaffenheit besitzt. Im allgemeinen Fall macht jedoch das Vorhandensein unendlich vieler Einheiten in k die Heranziehung transzendenter Hilfsmittel nötig, um einen Körper mit der verlangten Maximaleigenschaft zu bilden.

2. Als Ausgangspunkt für den Beweis beider Teile des Satzes dient folgender

Hilfssatz 1. *Ist $\mathfrak{f}' = \mathfrak{p}^e \cdot \mathfrak{f}$ ein Ideal aus k mit $(\mathfrak{p}, \mathfrak{f}) = 1$ und K' der Klassenkörper zur Strahlklassengruppe mod. $\mathfrak{f}'$, so gilt für den Grad von K' über dem Trägheitskörper K'_T der Primteiler von $\mathfrak{p}$ in K'/k die Relation:*

$$(K' : K'_T) = \Phi(\mathfrak{p}^e)\, \frac{e(\mathfrak{f})}{e(\mathfrak{f}')} \leqq \Phi(\mathfrak{p}^e).$$

Hierbei ist $e(\mathfrak{f})$ bzw. $e(\mathfrak{f}')$ die Zahl der durch Einheiten ε aus k gelieferten Restklassen mod. $\mathfrak{f}$ bzw. mod. $\mathfrak{f}'$.

Der Trägheitskörper K'_T stimmt als größter Unterkörper von K'/k mit zu $\mathfrak{p}$ primem Führer notwendig mit dem Strahlklassenkörper K mod. $\mathfrak{f}$ überein. Man hat also

---

[7]) Zu den Definitionen der Takagischen Klassenkörpertheorie vgl. *H. Hasse*, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil I und Ia, Jahresber. d. D. M.-V. **35** (1926), S. 1—55, und **36** (1927), S. 233—311. Im folgenden zitiert mit B. I und B. Ia.

$$(K' : K'_T) = \frac{(K' : k)}{(K : k)} = \frac{h_0^{(\mathfrak{f}')}}{h_0^{(\mathfrak{f})}},$$

wo $h_0^{(\mathfrak{f}')}$ bzw. $h_0^{(\mathfrak{f})}$ die Strahlklassenzahl mod. $\mathfrak{f}'$ bzw. mod. $\mathfrak{f}$ bezeichnen. Nun ist [8])

$$h_0^{(\mathfrak{f}')} = h_0 \frac{\Phi(\mathfrak{f}')}{e(\mathfrak{f}')}, \qquad h_0^{(\mathfrak{f})} = h_0 \frac{\Phi(\mathfrak{f})}{e(\mathfrak{f})},$$

unter h_0 die absolute Idealklassenzahl in k verstanden. Da $\Phi(\mathfrak{f}') = \Phi(\mathfrak{p}^e)\,\Phi(\mathfrak{f})$ ist, ergibt sich somit zunächst die Gleichung

$$(K' : K'_T) = \Phi(\mathfrak{p}^e) \frac{e(\mathfrak{f})}{e(\mathfrak{f}')}.$$

Diese Gleichung läßt sich aber mühelos zu einer Ungleichung ausgestalten. Ist nämlich $\mathfrak{E}$ die Gruppe aller Einheiten ε aus k, $\mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{f}')}$ bzw. $\mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{f})}$ bzw. $\mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{p}^e)}$ die Untergruppe derjenigen Einheiten, die $\equiv 1\ (\mathfrak{f}')$ bzw. $\equiv 1\ (\mathfrak{f})$ bzw. $\equiv 1\ (\mathfrak{p}^e)$ sind, so ist

$$(3) \qquad e(\mathfrak{f}') = (\mathfrak{E} : \mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{f}')}), \quad e(\mathfrak{f}) = (\mathfrak{E} : \mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{f})}), \quad \mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{f}')} = \mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{f})} \frown \mathfrak{E}^{(\mathfrak{p}^e)}.$$

Aus (3) folgt $e(\mathfrak{f}) \leqq e(\mathfrak{f}')$ und damit

$$(K' : K'_T) = \Phi(\mathfrak{p}^e) \frac{e(\mathfrak{f})}{e(\mathfrak{f}')} \leqq \Phi(\mathfrak{p}^e).$$

3. Um den ersten Teil unseres Satzes auf Grund von Hilfssatz 1 zu beweisen, nehmen wir an, es sei $\mathfrak{f}' = \mathfrak{p}^e \cdot \mathfrak{f}$ der Führer von L/k. Dann ist $(\mathfrak{p}, \mathfrak{f}) = 1$, weil $\mathfrak{p}^e$ die höchste in $\mathfrak{f}'$ aufgehende Potenz von $\mathfrak{p}$ ist. L ist in dem zur Strahlklassengruppe mod. $\mathfrak{f}'$ gehörigen Klassenkörper K' enthalten, mithin der Trägheitskörper der Primteiler von $\mathfrak{p}$ in L/k gleich dem Durchschnitt von L mit dem Trägheitskörper K'_T der Primteiler von $\mathfrak{p}$ in K'/k, $L_T = L \frown K'_T$. Daraus schließt man

$$(L : L_T) = (LK'_T : K'_T) \leqq (K' : K'_T),$$

so daß der Hilfssatz das gewünschte Resultat

$$(L : L_T) \leqq \Phi(\mathfrak{p}^e)$$

ergibt.

4. Der Beweis des zweiten Teiles unseres Satzes erfordert etwas größeren Aufwand. Wir werden zeigen: Bei passender Wahl des zu $\mathfrak{p}$ primen Ideales $\mathfrak{f}$ besitzt der Klassenkörker K' zur Strahlklassengruppe mod. $\mathfrak{f}' = \mathfrak{p}^e \cdot \mathfrak{f}$ die Eigenschaft $(K' : K'_T) = \Phi(\mathfrak{p}^e)$. Zu diesem Zweck haben wir nach Hilfssatz 1 $\mathfrak{f}$ so zu bestimmen, daß $e(\mathfrak{f}) = e(\mathfrak{f}')$ ist. Gemäß (3) ist daher der zweite Teil unseres Satzes eine Folge der nachstehenden Existenzaussage:

(E) *In k existiert bei gegebenem $\mathfrak{p}^e$ ein zu einem beliebigen Ideal $\mathfrak{a}$ primes Ideal $\mathfrak{f}$ derart, daß*

$$\mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{f})} \leqq \mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{p}^e)}$$

ist.

Zur Herleitung von (E) betrachten wir zunächst einen Spezialfall, aus dem der allgemeine Fall durch schrittweise Verallgemeinerung gewonnen wird.

a) (Spezialfall.) (E) *ist richtig, wenn k die m-ten Einheitswurzeln enthält, wo $m = \Phi(\mathfrak{p}^e)$ ist.*

Bedeutet $\mathfrak{E}^m$ die Gruppe aller m-ten Potenzen von Einheiten aus k, so ist jedenfalls $\mathfrak{E}^m \leqq \mathfrak{E}^{(\mathfrak{p}^e)}$, und (E) steckt daher unter unseren gegenwärtigen Voraussetzungen in der weitergehenden Behauptung:

---

[8]) B. I a, S. 241.

(E_m) *Sind die m-ten Einheitswurzeln in k enthalten, so existiert stets ein zu* $\mathfrak{a}$ *primes Ideal* $\mathfrak{f}$ *in k derart, daß*

$$\mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{f})} \leqq \mathfrak{E}^m$$

ist.

Wir beweisen (E_m). $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ sei eine Basis von $\mathfrak{E}$. Dann ist $\varepsilon_0^m, \varepsilon_1^m, \ldots, \varepsilon_r^m$ eine Basis von $\mathfrak{E}^m$, und $\mathfrak{E}^m$ kann als Durchschnitt von $r+1$ Gruppen $\mathfrak{E}'$ dargestellt werden, etwa $\mathfrak{E}'_0, \ldots, \mathfrak{E}'_r$, von denen jede eine Basis der Form

$$\eta^m, \eta_1, \ldots, \eta_r$$

besitzt. Dabei ist η für $\mathfrak{E}'_i$ gleich ε_i, während $\eta_1, \ldots, \eta_r$ die übrigen unter den $r+1$ Einheiten $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ bezeichnen. Da die Ungleichungen $\mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{f}_i)} \leqq \mathfrak{E}'_i$ unmittelbar $\mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{f}_0 \mathfrak{f}_1 \cdots \mathfrak{f}_r)} \leqq \mathfrak{E}'_0 \frown \mathfrak{E}'_1 \frown \ldots \frown \mathfrak{E}'_r = \mathfrak{E}^m$ nach sich ziehen, genügt es bei gegebenem $\mathfrak{E}'$ das zu $\mathfrak{a}$ prime Ideal $\mathfrak{f}$ so zu bestimmen, daß $\mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{f})} \leqq \mathfrak{E}'$ ist. Wir werden dartun: *Man hat in k stets unendlich viele Primideale* $\mathfrak{q}$ *zur Verfügung, für die* $\mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{q})} \leqq \mathfrak{E}'$ *ist*, also sicher auch unendlich viele derartige Primideale, die zugleich zu $\mathfrak{a}$ prim sind.

Das Primideal $\mathfrak{q}$ hat offenbar die verlangte Eigenschaft, wenn für die m-ten Potenzrestsymbole $\left(\frac{\eta}{\mathfrak{q}}\right)$ bzw. $\left(\frac{\eta_i}{\mathfrak{q}}\right)$ gilt:

$$(4) \qquad \left(\frac{\eta}{\mathfrak{q}}\right) = \text{primitive } m\text{-te Einheitswurzel}, \quad \left(\frac{\eta_i}{\mathfrak{q}}\right) = 1;$$

denn dann kann eine Einheit $\varepsilon = \eta^x \eta_1^{x_1} \cdots \eta_r^{x_r}$ nur dann $\equiv 1\,(\mathfrak{q})$ sein, wenn $x \equiv 0\,(m)$, also ε in $\mathfrak{E}'$ enthalten ist.

Daß stets unendlich viele Primideale $\mathfrak{q}$ existieren, die den Bedingungen (4) genügen, erkennt man unter unseren Voraussetzungen durch Verallgemeinerung des bekannten Verfahrens, das im Fall eines Primzahlexponenten m zum Ziele führt. Man überlegt nämlich ohne große Mühe nach dem vom Primzahlfall geläufigen Schema [9]):

Es ist $\left(\frac{\eta}{\mathfrak{q}}\right) = $ primitive m-te Einheitswurzel, wenn $\mathfrak{q}$ in $k(\sqrt[m]{\eta})$ ein Primideal m-ten Grades ist; es ist $\left(\frac{\eta_i}{\mathfrak{q}}\right) = 1$, wenn $\mathfrak{q}$ in $k(\sqrt[m]{\eta_i})$ in ein Produkt von m verschiedenen Primidealen zerfällt.

Die erste Bedingung besagt, daß $\mathfrak{q}$ bei der durch $k(\sqrt[m]{\eta})\,/\,k$ in k bestimmten Idealklasseneinteilung in einer Klasse C liegt, deren m-te Potenz als früheste mit der Einheitsklasse übereinstimmt. Die weiteren Bedingungen bedeuten, daß $\mathfrak{q}$ sich jeweils in der Hauptklasse H_i der durch $k(\sqrt[m]{\eta_i})/k$ in k hervorgerufenen Klasseneinteilung befindet. Nach dem Satz von der Existenz unendlich vieler Primideale in jeder Strahlklasse ist also die Existenz unendlich vieler Primideale $\mathfrak{q}$ gesichert, falls der Durchschnitt der H_i mit C nicht leer ist. Nun ist der Durchschnitt der H_i nicht leer, weil er gleich der dem Körper $k(\sqrt[m]{\eta_1}, \ldots, \sqrt[m]{\eta_r})$ in k zugeordneten Hauptklasse H' ist. Es ist ferner der Durchschnitt von H' mit einer beliebigen Klasse aus der dem Körper $k(\sqrt[m]{\eta})\,/\,k$ in k entsprechenden Klassengruppe nicht leer, wenn $k(\sqrt[m]{\eta})$ von $k(\sqrt[m]{\eta_1}, \ldots, \sqrt[m]{\eta_r})$ unabhängig ist. Die Unabhängigkeit der Körper $k(\sqrt[m]{\eta}), k(\sqrt[m]{\eta_1}), \ldots, k(\sqrt[m]{\eta_r})$ ergibt sich aber unmittelbar

[9]) Vgl. auch *H. Hasse*, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil II, erscheint in den Jahresber. d. D. M.-V. 1930.

daraus, daß $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_r$ eine Basis von $\mathfrak{E}$ bilden und infolgedessen ein Potenzprodukt $\eta^y \eta_1^{y_1} \cdots \eta_r^{y_r}$ nur dann m-te Potenz einer Zahl aus k sein kann, wenn alle Exponenten durch m teilbar sind. Damit ist die Existenz unendlich vieler $\mathfrak{q}$ bewiesen.

b) (Erste Verallgemeinerung.) (E) *ist richtig, wenn k die m_0-ten Einheitswurzeln enthält, wo $m_0 = \Psi(\mathfrak{p}^e)$ ist.*

Es genügt offenbar, folgendes nachzuweisen:

(E_{m_0}) *Wenn k die m_0-ten Einheitswurzeln enthält, so existiert stets ein zu $\mathfrak{a}$ primes Ideal $\mathfrak{f}$ in k, für das $\mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{f})} \leqq \mathfrak{E}^m$ ist.*

In $k' = k_m$ ist nach (E_m) ein zu $\mathfrak{a}$ primes Ideal $\mathfrak{f}'$ vorhanden, so daß $\mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{f}')} \leqq \mathfrak{E}'^m$ ist, wobei $\mathfrak{E}'$ die Gruppe aller Einheiten aus k' bedeutet. Setzt man $\mathfrak{f}' \frown k = \mathfrak{f}$, so ist $\mathfrak{f}$ ebenfalls prim zu $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{E}_0'^{(\mathfrak{f}')} \frown k = \mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{f})}$. Man hat also $\mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{f})} \leqq \mathfrak{E}'^m \frown k$, und $\mathfrak{f}$ ist sicher ein Ideal der gesuchten Art, falls $\mathfrak{E}'^m \frown k = \mathfrak{E}^m$ ist.

(E_{m_0}) ist damit zurückgeführt auf den nachstehenden Hilfssatz, dessen Begründung wir am Schluß dieses Paragraphen nachtragen.

Hilfssatz 2. *Es sei m_0 gleich dem Produkt aller verschieden in m aufgehenden Primzahlen, bzw. gleich dem Doppelten dieses Produkts, falls m durch 4 teilbar ist; k enthalte die m_0-ten Einheitswurzeln. Ist dann $k' = k_m$, so ist $\mathfrak{E}'^m \frown k = \mathfrak{E}^m$.*

c) (Volle Verallgemeinerung.) (E) *ist stets richtig.*

Diese letzte Verallgemeinerung beruht auf der Bemerkung: Ist k'' ein beliebiger Oberkörper von k, $\mathfrak{p}''^{e''}$ eine Primidealpotenz in k'', für die $\mathfrak{p}''^{e''} \frown k = \mathfrak{p}^e$ ist, und haben $\mathfrak{E}_0''^{(\mathfrak{p}''^{e''})}$ bzw. $\mathfrak{E}_0''^{(\mathfrak{f}'')}$ in k'' dieselbe Bedeutung wie $\mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{p}^e)}$ bzw. $\mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{f})}$ in k, so ist (E) bewiesen, sobald die entsprechende Existenzaussage (E″) für k'' feststeht. Dabei lautet (E″):

(E″) In k'' existiert bei gegebenem $\mathfrak{p}''^{e''}$ ein zu dem Ideal $\mathfrak{a}$ primes Ideal $\mathfrak{f}''$ derart, daß

$$\mathfrak{E}_0''^{(\mathfrak{f}'')} \leqq \mathfrak{E}_0''^{(\mathfrak{p}''^{e''})}$$

ist.

Um einzusehen, daß (E″) stets (E) nach sich zieht, bedenke man, daß $\mathfrak{E}_0''^{(\mathfrak{p}''^{e''})} \frown k = \mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{p}^e)}$, daß ferner (wie bereits in b) benutzt) $\mathfrak{f}'' \frown k = \mathfrak{f}$ mit $\mathfrak{f}''$ gleichzeitig prim zu $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{E}_0''^{(\mathfrak{f}'')} \frown k = \mathfrak{E}_0^{(\mathfrak{f})}$ ist.

Nun gilt (E″) in k'' nach b) sicher, wenn die $\Psi''(\mathfrak{p}''^{e''})$-ten Einheitswurzeln in k'' enthalten sind. Zum vollständigen Beweis von (E) haben wir daher nur einen Körper k''/k zu bilden mit folgender Eigenschaft. In k'' läßt sich eine Primidealpotenz $\mathfrak{p}''^{e''}$ derart auswählen, daß $\mathfrak{p}''^{e''} \frown k = \mathfrak{p}^e$ ist und gleichzeitig die $\Psi''(\mathfrak{p}''^{e''})$-ten Einheitswurzeln in k'' vorkommen.

Wir behaupten: Ist p^n die absolute Norm eines Primteilers von $\mathfrak{p}$ in k_{p^2}, so ist $k'' = k_{p^2(p^n-1)}$ ein Körper der gewünschten Art. In der Tat, $\mathfrak{p}''$ sei ein Primteiler von $\mathfrak{p}$ in k'' und $\mathfrak{p}''^{e''}$ die höchste, in $\mathfrak{p}$ aufgehende Potenz von $\mathfrak{p}''$. Dann ist einerseits $\mathfrak{p}''^{e''} \frown k = \mathfrak{p}^e$. Andererseits ist die absolute Norm von $\mathfrak{p}''$ gleich p^n, also $\Phi''(\mathfrak{p}''^{e''}) = p^{n(e''-1)}(p^n - 1)$ und $\Psi''(\mathfrak{p}''^{e''})$ Teiler von $p^2(p^n - 1)$, d. h. die $\Psi''(\mathfrak{p}''^{e''})$-ten Einheitswurzeln sind in k'' enthalten.

5. Beweis des Hilfssatzes 2. Wir nennen s Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ aus k m-unabhängig in k, wenn eine Gleichung

$$\mu_1^{y_1} \mu_2^{y_2} \cdots \mu_s^{y_s} = \alpha^m \ (\alpha \text{ aus } k)$$

stets $y_i \equiv 0\,(m)$ nach sich zieht [10]). Unter Benutzung dieser Bezeichnung lautet die Behauptung des Hilfssatzes:

Wenn k die m_0-ten Einheitswurzeln enthält, so sind die Elemente $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ einer Basis von $\mathfrak{E}$ auch in k_m m-unabhängig.

Der Beweis setzt sich zusammen aus folgenden Tatsachen, von denen a) aus einer *Hasse*schen Arbeit entnommen werden kann [11]), während man b) und c) ohne große Mühe aus dem Begriff der m-Unabhängigkeit schließt.

l^n sei eine Primzahlpotenz.

a) *Ist $k = k_l$ (bzw. $k = k_4$, falls $l^n \equiv 0\,(4)$), so sind $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ in k_{l^n} l-unabhängig.*

b) *Ist $k = k_{l^n}$, so sind s Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$, die in k l-unabhängig sind, stets auch in k l^n-unabhängig.*

c) *Sind $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$ in k l-unabhängig, so sind sie auch in jeder Erweiterung von k, deren Grad zu l prim ist, l-unabhängig.*

Ist nun l eine in m aufgehende Primzahl und l^n die höchste Potenz von l, die m teilt, so sind $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ nach a) wegen $k = k_{m_0}$ in k_{l^n} l-unabhängig. Da der Grad von k_m/k_{l^n} wegen $k = k_{m_0}$ zu l prim ist, bleibt diese l-Unabhängigkeit nach c) in k_m erhalten, und es sind somit nach b) $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ in k_m sogar l^n-unabhängig. Das gilt für jede in m aufgehende Primzahl l und man schließt daher in der Tat: $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ sind in k_m m-unabhängig.

§ 5. Beweis des Existenzsatzes $\overline{7}$.

1. Vorbereitungen. Ist $\overline{H}$ eine Zahlgruppe in $\overline{k}$ mit den im Existenzsatz genannten Eigenschaften, so heiße ein Abelscher Körper $\overline{K}/\overline{k}$, dessen zugeordnete Zahlgruppe in $\overline{k}$ mit $\overline{H}$ übereinstimmt, Klassenkörper zu $\overline{H}$.

Um den späteren Gedankengang nicht unterbrechen zu müssen, stellen wir dem eigentlichen Existenzbeweis einige Tatsachen voran.

Zunächst geben wir zwei Folgerungen aus dem Isomorphie-, Umkehr- und Anordnungssatz der Klassenkörpertheorie im Kleinen an, die wir später benützen.

a) *Sind $\overline{H}_1 \leqq \overline{H}_2$ zwei Zahlgruppen aus $\overline{k}$, deren Führer je eine endliche Potenz von $\mathfrak{p}$ ist und die beide nicht nur aus zu $\mathfrak{p}$ primen Zahlen bestehen, und existiert ein Klassenkörper $\overline{K}_1/\overline{k}$ zu $\overline{H}_1$, so existiert auch ein Klassenkörper $\overline{K}_2/\overline{k}$ zu $\overline{H}_2$.*

Mit anderen Worten: Um die Existenz eines Klassenkörpers zu $\overline{H}_2$ zu beweisen, genügt es, die Existenz eines Klassenkörpers zu $\overline{H}_1$ zu bestätigen.

Beweis auf Grund des Isomorphiesatzes.

b) *Sind $\overline{K}_1$ und $\overline{K}_2$ Klassenkörper zu den Zahlgruppen $\overline{H}_1$ und $\overline{H}_2$ aus $\overline{k}$, so ist $\overline{K}_1\,\overline{K}_2$ Klassenkörper zu $\overline{H}_1 \frown \overline{H}_2$.*

Beweis auf Grund des Anordnungssatzes sowie der vorstehenden Folgerung aus dem Isomorphiesatz mit der im Hasseschen Bericht beim Beweis des entsprechenden Satzes angewandten Methode [12]).

Wir erwähnen ferner zwei Existenzaussagen.

c) *Ist f eine beliebig vorgegebene natürliche Zahl, so existiert stets ein Abelscher Körper $\overline{K}_0/\overline{k}$ vom Grad f und vom Führer $\mathfrak{p}^0$.*

---

[10]) Vgl. die entsprechende Definition für den Fall einer Primzahl m in B. I a, S. 261.

[11]) Ein weiteres Existenztheorem aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Math. Ztschr. **24** (1925), S. 149—160. — Die Tatsache a) ist in dieser Hasseschen Arbeit zwar nicht ausdrücklich formuliert, kann aber aus den Überlegungen auf S. 155 (unten) bis S. 156 (Mitte) herausgelesen werden.

[12]) B. I, S. 28.

Ein solcher Körper entsteht nach Henselschen Sätzen aus $\overline{k}$ durch Adjunktion einer primitiven $(p^n - 1)$-ten Einheitswurzel bei passender Wahl von n.

d) *Ist $\mathfrak{p}^e$ eine vorgegebene Potenz von $\mathfrak{p}$, so existiert stets ein Abelscher Körper $\overline{K}_e/\overline{k}$ vom Führer $\mathfrak{p}^e$, dessen Grad über seinem Trägheitskörper gleich $\Phi(\mathfrak{p}^e)$ ist,* $(\overline{K}_e : \overline{T}) = \Phi(\mathfrak{p}^e)$.

Dies folgt aus dem Satz des § 4, wenn man noch bedenkt, daß der $\mathfrak{p}$-Führer eines Abelschen Körpers K/k übereinstimmt mit dem Führer von $\overline{k}K/\overline{k}$.

2. Beweis des Existenzsatzes. Nach a) genügt es einen Abelschen Körper $\overline{K}^*/\overline{k}$ anzugeben, dem eine Untergruppe $\overline{H}^*$ der gegebenen Gruppe $\overline{H}$ als Zahlgruppe in $\overline{k}$ zugeordnet ist. Einen solchen Körper $\overline{K}^*$ werden wir auf Grund von b) — d) bilden. Der eigentliche Kern der Überlegung besteht dabei in dem Nachweis, daß man für gewisse, mit Hilfe von d) konstruierte Abelsche Oberkörper von $\overline{k}$ die ihnen in $\overline{k}$ zugeordnete Zahlgruppe explizit hinschreiben kann.

Die gegebene Gruppe $\overline{H}$ besitze den Führer $\mathfrak{p}^e$ und den Index h. Dann ist also der Strahl $\overline{S}_e$ mod. $\mathfrak{p}^e$ in $\overline{H}$ enthalten, $\overline{H} > \overline{S}_e$.

Nach d) existiert ein Abelscher Körper $\overline{K}_e/\overline{k}$, dessen Führer $\mathfrak{p}^e$ und dessen Grad über seinem Trägheitskörper $(\overline{K}_e : \overline{T}) = \Phi(\mathfrak{p}^e)$ ist. Ist $n = (\overline{K}_e : \overline{k})$ der Grad von $\overline{K}_e/\overline{k}$, so setze ich das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von h und n gleich f und verstehe unter $\overline{K}_0/\overline{k}$ einen (nach c) existierenden) Abelschen Körper vom Grad f und vom Führer $\mathfrak{p}^0$. Ich behaupte: Dem Körper $\overline{K}^* = \overline{K}_e\overline{K}_0$ ist in $\overline{k}$ die Zahlgruppe $\overline{H}^* = \{\pi^f, \overline{S}_e\}$ zugeordnet, die durch $\overline{S}_e$ und die f-te Potenz π^f einer genau durch $\mathfrak{p}$ teilbaren Zahl π von k erzeugt wird. Da $\overline{H}^*$ wegen $f \equiv 0\,(h)$ Untergruppe von $\overline{H}$ ist, ist mit dieser Behauptung nach dem bereits Bemerkten der Existenzsatz bewiesen.

Die Begründung der soeben aufgestellten Behauptung geschieht so. Sind $\overline{H}_e$ bzw. $\overline{H}_0$ die den Körpern $\overline{K}_e$ bzw. $\overline{K}_0$ zugeordneten Zahlgruppen aus $\overline{k}$, so ist $\overline{K}^*$ nach b) Klassenkörper zur Gruppe $\overline{H}_e \frown \overline{H}_0$. Nun ist einerseits wegen $(\overline{A} : \overline{H}_e) = (\overline{K}_e : \overline{k}) = n$ $\overline{H}_e \geqq \{\pi^n, \overline{S}_e\}$, andererseits wegen $(\overline{A} : \overline{H}_0) = (\overline{K}_0 : \overline{k}) = f$ $\overline{H}_0 \geqq \{\pi^f, \overline{S}_0\}$. Man hat daher

$$\overline{H}_e \frown \overline{H}_0 \geqq \{\pi^n, \overline{S}_e\} \frown \{\pi^f, \overline{S}_0\} = \{\pi^f, \overline{S}_e\} = \overline{H}^*,$$

und die Behauptung $\overline{H}_e \frown \overline{H}_0 = \overline{H}^*$ ist gesichert, wenn $(\overline{A} : \overline{H}_e \frown \overline{H}) \geqq (\overline{A} : \overline{H}^*)$ dargetan wird.

Nun ist aber $(\overline{A} : \overline{H}^*) = f\Phi(\mathfrak{p}^e)$. Andererseits gilt $(\overline{A} : \overline{H}_e \frown \overline{H}_0) = (\overline{K}_e\overline{K}_0 : \overline{k})$ und weiter $(\overline{K}_e\overline{K}_0 : \overline{k}) = (\overline{K}_0 : \overline{k})\,(\overline{K}_e\overline{K}_0 : \overline{K}_0) = (\overline{K}_0 : \overline{k})\,(\overline{K}_e : \overline{K}_e \frown \overline{K}_0)$, woraus zunächst $(\overline{A} : \overline{H}_e \frown \overline{H}_0) = f\,(\overline{K}_e : \overline{K}_e \frown \overline{K}_0)$ folgt. Da $\overline{K}_0/\overline{k}$ den Führer $\mathfrak{p}^0$ besitzt, ist $\overline{K}_e \frown \overline{K}_0$ sicher Unterkörper des Trägheitskörpers $\overline{T}$ von $\overline{K}_e$, also $\overline{K}_e \frown \overline{K}_0 \leqq \overline{T}$ und $(\overline{K}_e : \overline{K}_e \frown \overline{K}_0) \geqq (\overline{K}_e : \overline{T}) = \Phi(\mathfrak{p}^e)$. Man erhält somit in der Tat $(\overline{A} : \overline{H}_e \frown \overline{H}_0) \geqq (\overline{A} : \overline{H}^*)$.

§ 6. Beweis des Satzes 8.

Im vorigen Paragraphen haben wir mehr bewiesen, als der Existenzsatz aussagt. Wir haben nämlich gezeigt: Ist $\overline{H}$ eine Zahlgruppe von $\overline{k}$, deren Führer eine endliche Potenz von $\mathfrak{p}$ ist und die nicht nur zu $\mathfrak{p}$ prime Zahlen enthält, so existiert stets ein Abelscher Körper K^*/k der Art, daß die dem Körper $\overline{k}K^*/\overline{k}$ in $\overline{k}$ zugeordnete Zahlgruppe $\overline{H}^*$ Untergruppe von $\overline{H}$ ist. Nun ist die Galoisgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\overline{k}K^*/\overline{k}$ zur Galoisgruppe

$\mathfrak{G}$ von $K^*\overline{/k} \frown K^*$ isomorph, und zwar erhält man einen Isomorphismus I zwischen $\overline{\mathfrak{G}}$ und $\mathfrak{G}$, wenn man jedem Automorphismus von $\overline{k}K^*/\overline{k}$ den durch ihn erzeugten Automorphismus von $K^*/\overline{k} \frown K^*$ zuordnet. Mit Hilfe dieses Isomorphismus I kann man weiter jedem Unterkörper $\overline{K'}$ von $\overline{k}K^*/\overline{k}$ einen Unterkörper K' von $K^*/\overline{k} \frown K$ eindeutig entsprechen lassen, indem man nämlich zunächst die $\overline{K'}$ im Sinne der Galoisschen Theorie zugehörige Untergruppe $\overline{\mathfrak{G}'}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ aufsucht, dann die durch I auf $\overline{\mathfrak{G}'}$ bezogene Untergruppe $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ bestimmt und endlich den $\mathfrak{G}'$ im Sinne der Galoisschen Theorie zugehörigen Unterkörper K' von $K^*/\overline{k} \frown K^*$ ermittelt. Für je zwei so einander entsprechende Unterkörper $\overline{K'}$ und K' ist offenbar $\overline{K'} = \overline{k}K'$, d. h. jeder Unterkörper $\overline{K'}$ von $\overline{k}K^*/\overline{k}$ kann in diesem Sinn durch einen Unterkörper K' von $K^*/\overline{k} \frown K^*$ erzeugt werden. Insbesondere gilt das also auch von demjenigen Unterkörper $\overline{K}$ von $\overline{k}K^*/\overline{k}$, der Klassenkörper zu $\overline{H}$ ist, und man hat daher:

$\overline{7}'$. (Verschärfter Existenzsatz.) *Ist $\overline{H}$ eine Zahlgruppe von $\overline{k}$, deren Führer eine endliche Potenz von $\mathfrak{p}$ ist und die nicht nur zu $\mathfrak{p}$ prime Zahlen enthält, so existiert stets ein Abelscher Körper K/k der Art, daß $\overline{k}K$ Klassenkörper zur Gruppe $\overline{H}$ ist.*

Aus **$\overline{7}'$.** folgt unmittelbar Satz **$\overline{8}$.** Ist nämlich $\overline{K}/\overline{k}$ ein beliebiger Abelscher Körper, $\overline{H}$ die ihm in $\overline{k}$ zugeordnete Zahlgruppe und K/k ein nach **$\overline{7}'$.** existierender Abelscher Körper derart, daß $\overline{k}K$ Klassenkörper zur Gruppe $\overline{H}$ ist, so ist nach dem Eindeutigkeitssatz $\overline{K} = \overline{k}K$.

Eingegangen 21. Dezember 1929.

Führer, Diskriminante und Verzweigungskörper relativ-Abelscher Zahlkörper.

Von *Helmut Hasse* in Halle.

Es sei k ein algebraischer Zahlkörper, K ein über k Abelscher Zahlkörper, und H die K zugeordnete Idealgruppe in k, zu der K als Klassenkörper gehört.

Unter den Hauptsätzen der Klassenkörpertheorie [1]) findet sich der Führer-Diskriminantensatz [2]), der folgendes aussagt:

Der Führer $\mathfrak{f}$ *von* H *und die Diskriminante* $\mathfrak{d}$ *von* K/k *bestehen aus denselben Primidealen.*

Ich nenne $\mathfrak{f}$, wie üblich, auch einfach den Führer von K/k und schreibe dafür $\mathfrak{f}(K/k)$, wenn die Abhängigkeit von den Körpern k und K zum Ausdruck gebracht werden soll, entsprechend auch $\mathfrak{d}(K/k)$, $\mathfrak{D}(K/k)$ (Differente) und $H(K/k)$.

Der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{d}$ läßt sich genau angeben [3]):

Durchläuft χ alle Charaktere der Klassengruppe nach H, und bezeichnet $H(\chi)$ die durch $\chi(\mathfrak{a}) = 1$ definierte Idealgruppe in k, $\mathfrak{f}(\chi)$ ihren Führer, kurz den Führer von χ, so ist einerseits

$$\mathfrak{f} = \underset{\chi}{M}\, \mathfrak{f}(\chi) \tag{F}$$

das kleinste gemeinsame Multiplum aller $\mathfrak{f}(\chi)$, andererseits

$$\mathfrak{d} = \underset{\chi}{\Pi}\, \mathfrak{f}(\chi) \tag{D}$$

das Produkt aller $\mathfrak{f}(\chi)$.

Während die Formel (F) sich fast unmittelbar aus der Definition des Führers einer Idealgruppe ergibt, ist die Formel (D) eine tiefliegende Tatsache für die Diskriminante eines relativ-Abelschen Zahlkörpers. Zu ihrem Beweise war man bisher auf außerordentlich komplizierte Hilfsmittel angewiesen, nämlich auf die Funktionalgleichung der Heckeschen L-Reihen mit Größencharakteren.

Ich gebe im folgenden einen rein-arithmetischen Beweis für (D), der sich methodisch ganz im Rahmen der übrigen Beweise aus der Klassenkörpertheorie hält. Er stützt sich wesentlich auf Ergebnisse aus der Normenresttheorie, die ich in zwei vorangegangenen Arbeiten entwickelt habe [4]).

---

[1]) *T. Takagi*, Über eine Theorie des relativ-Abelschen Zahlkörpers, Journ. Coll. Science Tokyo **41** (1920); im folgenden zitiert mit T. — Siehe auch *H. Hasse*, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresber. d. D. M.-V. **35** (1926) und **36** (1927); im folgenden zitiert mit B. I und B. I a.

[2]) B. I, § 4, Satz 6.

[3]) B. I, § 9, Sätze 16, 17.

[4]) *H. Hasse*: Neue Begründung und Verallgemeinerung der Theorie des Normenrestsymbols, ds. Journ. **162** (1930); Die Normenresttheorie relativ-Abelscher Zahlkörper als Klassenkörpertheorie im Kleinen, ds. Journ. **162** (1930). — Im folgenden zitiert mit N. R. I und N. R. II.

Es genügt, die Formel (D) für die Beiträge der einzelnen Primideale von k zu $\mathfrak{d}$ und den $\mathfrak{f}(\chi)$ zu beweisen. Ich lege im folgenden ein beliebiges Primideal $\mathfrak{p}$ von k fest zugrunde, nenne seine Beiträge zu $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}(\chi)$ die *$\mathfrak{p}$-Diskriminante von K/k*, den *$\mathfrak{p}$-Führer von K/k* und den *$\mathfrak{p}$-Führer von χ*, und bezeichne sie mit $\mathfrak{d}_\mathfrak{p} = \mathfrak{d}_\mathfrak{p}(K/k)$, $\mathfrak{f}_\mathfrak{p} = \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(K/k)$ und $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\chi)$.

Der schwierigste Punkt des Beweises bezieht sich auf den Fall, daß $\mathfrak{p}$ ein im Grad von K/k aufgehender (sog. irregulärer) Diskriminantenteiler ist, daß also von K verschiedene Verzweigungskörper zu $\mathfrak{p}$ vorhanden sind. Zur Behandlung dieses Falles erweist es sich als erforderlich, die Theorie der Verzweigungskörper für einen Abelschen Körper K/k weiter auszubauen, als dies bisher geschehen ist.

Ich tue das im folgenden gleich in etwas größerem Ausmaße, als es für den eben genannten Zweck notwendig wäre. Es handelt sich um die Analoga für die Verzweigungskörper zu der folgenden Charakterisierung des Trägheitskörpers K_T zu $\mathfrak{p}$ für K/k:

(T) *Der Trägheitskörper K_T enthält alle Teilkörper von K/k, deren $\mathfrak{p}$-Führer $\mathfrak{p}^0$ ist, und hat selbst den $\mathfrak{p}$-Führer $\mathfrak{p}^0$* [1]).

Es sei $K_0, K_1, K_2, \ldots$ die aufsteigende Reihe der verschiedenen unter den Verzweigungskörpern zu $\mathfrak{p}$ für K/k [2]). Ich werde zunächst die folgende Charakterisierung des Verzweigungskörpers K_0 beweisen, gültig sofern $K_0 > K_T$ ist:

($\mathcal{V}_0$) *Der Verzweigungskörper K_0 enthält alle Teilkörper von K/k, deren $\mathfrak{p}$-Führer höchstens $\mathfrak{p}^1$ ist, und hat selbst den $\mathfrak{p}$-Führer $\mathfrak{p}^1$.*

Ferner sei $\mathfrak{p}^{1+a_1}, \mathfrak{p}^{1+a_2}, \ldots$ die aufsteigende Reihe der verschiedenen unter den $\mathfrak{p}$-Führern aller Teilkörper von K/k, soweit sich es um höhere Potenzen als $\mathfrak{p}^1$ handelt (also die $a_\nu > 0$). Dann werde ich die folgende Charakterisierung der überstrichenen Verzweigungskörper $K_\nu (\nu \geqq 1)$ beweisen:

($\mathcal{V}_\nu$) *Der ν-mal überstrichene Verzweigungskörper K_ν enthält alle Teilkörper von K/k, deren $\mathfrak{p}$-Führer höchstens $\mathfrak{p}^{1+a_\nu}$ ist, und hat selbst den $\mathfrak{p}$-Führer $\mathfrak{p}^{1+a_\nu}$.*

Insbesondere ist also, wenn n der Index des höchsten vorkommenden $\mathfrak{p}$-Führers $\mathfrak{p}^{1+a_n}$ ist (d. i. des $\mathfrak{p}$-Führers $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(K/k)$ selbst), $K_n = K$ das Schlußglied der Verzweigungskörperreihe.

Aus diesen Charakterisierungen ergeben sich übrigens leicht die Analoga für die überstrichenen Verzweigungskörper zu den folgenden Eigenschaften des Trägheitskörpers und des Verzweigungskörpers:

(T′) *Sind k', K' irgend zwei Körper mit der Eigenschaft $k \leqq k' < K' \leqq K_T$, so ist für K'/k' zu jedem Primteiler von $\mathfrak{p}$ der Trägheitskörper $K'_T = K'$* [3]).

($\mathcal{V}_0'$) *Sind k', K' irgend zwei Körper mit der Eigenschaft $K_T \leqq k' < K' \leqq K_0$, so ist für K'/k' zu jedem Primteiler von $\mathfrak{p}$ der Trägheitskörper $K'_T = k'$ und der Verzweigungskörper $K'_0 = K'$* [4]).

Es sei v_ν die genaue Ordnungszahl von $K_{\nu-1}$ in folgendem Sinne: Die Galoissche Gruppe von $K/K_{\nu-1}$ [5]) ist genau die v_ν-te Verzweigungsgruppe [6]), d. h. sie ist die Ge-

[1]) B. I, § 7.

[2]) In den Bezeichnungen des Hilbertschen Zahlberichts ist K_ν der ν-mal überstrichene Verzweigungskörper. Ich behalte diese einmal eingebürgerte Benennung im folgenden bei, obwohl ich mich in der Bezeichnung ihr nicht gut anschließen kann. Insbesondere nenne ich K_0 den Verzweigungskörper schlechthin, die K_ν mit $\nu > 0$ die überstrichenen Verzweigungskörper, und K_1 den überstrichenen Verzweigungskörper schlechthin.

[3]) Das ergibt sich unmittelbar aus B. I a, § 8, (12.) nebst (5.) und (7.); aber auch leicht aus (T).

[4]) Das ergibt sich unmittelbar aus B. I a, § 8, (12.) nebst (5.), (7.) und (9.); aber auch leicht aus ($\mathcal{V}_0$).

[5]) In den Bezeichnungen des Hilbertschen Zahlberichts ist das die $(\nu-1)$-mal überstrichene Verzweigungsgruppe.

[6]) Das ist die in B. I a, § 8 gegebene Zählung. Siehe auch *A. Speiser*, Die Zerlegungsgruppe, ds. Journ. 149 (1919). — Die Zahl $v_\nu - 1$ ist die nach dem Hilbertschen Zahlbericht mit einem $(\nu-1)$-mal überstrichenen L zu bezeichnende Zahl.

samtheit aller Substitutionen von K/k, die die additiven ganzzahligen Restklassen noch mod. $\mathfrak{P}^{1+v_\nu}$, aber nicht mehr mod. $\mathfrak{P}^{1+(v_\nu+1)}$ ungeändert lassen [1]), wo $\mathfrak{P}$ irgendeinen Primteiler von $\mathfrak{p}$ in K bedeutet. Nach ihrer Erklärung haben die Zahlen v_ν jedenfalls die Eigenschaft

$$0 < v_1 < v_2 < \cdots < v_n. \tag{1}$$

Ich nenne sie die den überstrichenen Verzweigungskörpern zugeordneten *Verzweigungszahlen* für K/k zu $\mathfrak{p}$. Ich werde nun für die überstrichenen Verzweigungskörper K_ν $(\nu \geqq 1)$ beweisen:

($\mathcal{U}'_\nu$) *Sind k', K' irgend zwei Körper mit der Eigenschaft $K_{\nu-1} \leqq k' < K' \leqq K_\nu$, so ist für K'/k' zu jedem Primteiler von $\mathfrak{p}$ der Verzweigungskörper $K'_0 = k'$ und der überstrichene Verzweigungskörper $K'_1 = K'$.*

Die zugehörige Verzweigungszahl ist $v'_1 = v_\nu$.

Für den Spezialfall, daß K/k zyklisch von Primzahlpotenzgrad ist, hat schon Herr Takagi den dann in dieser Tatsache liegenden Inhalt ausgesprochen [2]), allerdings ohne einen Beweis anzugeben.

Die Bedeutung der Verzweigungszahlen v_ν für das eigentliche Ziel dieser Arbeit, den Nachweis der Diskriminantenformel (D), liegt darin, daß ihre Kenntnis zur Bestimmung der $\mathfrak{p}$-Diskriminante $\mathfrak{d}_\mathfrak{p}(K/k)$ erforderlich ist. Ist nämlich p die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primzahl, ferner p^{r_ν} der Grad von $K_\nu/K_{\nu-1}$, also $p^m = p^{r_1+\cdots+r_n}$ der Grad von K/K_0 und sind $e = e_0 p^m$ (e_0 prim zu p), f, g die Grade von K/K_T (K_0/K_T), K_T/K_Z, K_Z/k (K_Z der Zerlegungskörper zu $\mathfrak{p}$ für K/k), so ist [3]):

$$\mathfrak{d}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{gf[(e-1)+v_1(p^m-1)+(v_2-v_1)(p^{m-r_1}-1)+\cdots+(v_n-v_{n-1})(p^{r_n}-1)]}$$

oder auch:

$$\mathfrak{d}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{gf[(e-1)+v_1(p^m-p^{m-r_1})+v_2(p^{m-r_1}-p^{m-r_1-r_2})+\cdots+v_n(p^{r_n}-1)]}. \tag{2}$$

Die vorstehend zusammengestellten Ergebnisse dieser Arbeit erlauben zusammengenommen noch die Bestimmung der $\mathfrak{p}$-Führer $\mathfrak{p}^{1+a_\nu}$. Man erhält, wie ich zum Schluß zeigen werde:

($\mathcal{U}$) *Es gelten die Kongruenzen*

$$v_1 \equiv 0 \bmod e_0$$
$$v_\nu \equiv v_{\nu-1} \bmod e_0 p^{r_1+\cdots+r_{\nu-1}},$$

und es ist

$$a_\nu = \frac{v_1}{e_0} + \frac{v_2 - v_1}{e_0 p^{r_1}} + \cdots + \frac{v_\nu - v_{\nu-1}}{e_0 p^{r_1+\cdots+r_{\nu-1}}}.$$

Insbesondere drückt sich hiernach, unter Berücksichtigung von (T), ($\mathcal{U}_0$), ($\mathcal{U}_\nu$), der $\mathfrak{p}$-Führer $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(K/k)$ selbst folgendermaßen aus:

$$\mathfrak{f}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^0, \qquad \text{wenn } K_T = K,$$
$$\mathfrak{f}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^1, \qquad \text{wenn } K_T < K, \text{ aber } K_0 = K,$$
$$\mathfrak{f}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{1+a_n} = \mathfrak{p}^{1+\frac{v_1}{e_0}+\frac{v_2-v_1}{e_0 p^{r_1}}+\cdots+\frac{v_n-v_{n-1}}{e_0 p^{r_1+\cdots+r_{n-1}}}}, \qquad \text{wenn } K_0 < K.$$

Diese Tatsachen hat für den Spezialfall, daß K/k zyklisch von Primzahlpotenzgrad ist, schon Herr Sugawara aus der Diskriminantenformel (D) hergeleitet [4]), ohne allerdings

---

[1]) Oder auch: die die multiplikativen Restklassen noch mod. $\mathfrak{P}^{v_\nu}$ aber nicht mehr mod. $\mathfrak{P}^{v_\nu+1}$ ungeändert lassen. — Vergl. B. I a, § 3.

[2]) T., § 6, S. 27.

[3]) B. I a, § 8, (14.).

[4]) *M. Sugawara*, Über den Führer eines relativ-Abelschen Zahlkörpers, Proc. Imp. Acad. Tokyo 2 (1926).

vorher einen rein-arithmetischen Beweis für (D) in diesem Spezialfalle gegeben zu haben. Insbesondere hat Herr Sugawara auf die in ($\mathcal{V}$) genannten Kongruenzen hingewiesen — in jenem Spezialfall lauten sie $v_\nu \equiv v_{\nu-1} \bmod. p^{\nu-1}$, weil alle $r_\nu = 1$ sind —, als interessante Verschärfung der Kongruenzen $v_\nu \equiv v_{\nu-1} \bmod. p$, die Herr Speiser sogar für beliebige Galoissche Körper K/k aus allgemeineren Prinzipien hergeleitet hat [1]).

§ 1. Skizze des Beweisganges. Bezeichnungsfestsetzungen.

Ehe ich in die eigentlichen Beweise eintrete, mag in diesem § 1 der Beweisgang skizziert werden.

Zunächst werde ich in § 2 die Tatsache ($\mathcal{V}_0$) unter der speziellen Voraussetzung $K_T = k$ beweisen, entsprechend dann in § 3 die Tatsache ($\mathcal{V}_1$) unter der speziellen Voraussetzung $K_0 = k$.

Auf diese Spezialfälle, die den eigentlichen Kern der in der Einleitung allgemein formulierten Tatsachen ($\mathcal{V}_0$), ($\mathcal{V}_\nu$) bilden, werde ich den allgemeinen Beweis sowohl dieser Tatsachen, als auch der Formel (D) durch ein Verfahren reduzieren können, das sich auf den folgenden Sachverhalt gründet [2]): Ist k' ein Teilkörper von K/k, so erhält man aus der Teilkörperreihe:

$$k,\ K_Z,\ K_T,\ K_0,\ K_1,\ \ldots$$

für K/k zu $\mathfrak{p}$ die entsprechende, „neue" Teilkörperreihe:

$$k',\ K'_Z,\ K'_T,\ K'_0,\ K'_1,\ \ldots$$

für K/k' zu einem Primteiler $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{p}$ in k', indem man die Körper der ersteren, „alten" Reihe mit k' komponiert und dabei zusammenfallende Verzweigungskörper nur einmal zählt, also nach dem Schema:

$$\begin{gathered} kk' = k',\ K_Z k' = K'_Z,\ K_T k' = K'_T,\ K_0 k' = \cdots = K_{v_1-1} k' = K'_0, \\ K_{v_1} k' = \cdots = K_{v_2-1} k' = K'_1, \ldots . \end{gathered}$$

Die zugehörigen neuen Verzweigungszahlen v'_ν drücken sich dabei durch die alten v_ν so aus:

$$v'_1 = v_{v_1},\ \ v'_2 = v_{v_2}, \ldots$$

Ist insbesondere der Körper k' zwischen zwei Körpern der alten Reihe eingeschachtelt (speziell selbst ein Körper der alten Reihe), so liefern einfach die auf k' in dieser alten Reihe folgenden Körper nebst den zugehörigen alten Verzweigungszahlen die von k' verschiedenen Körper der neuen Reihe nebst den zugehörigen neuen Verzweigungszahlen [3]).

Das genannte Reduktionsverfahren verläuft dann für die Sätze ($\mathcal{V}_\nu$) ($\nu \geqq 0$) folgendermaßen:

Ich nehme zunächst $k' = K_T$ und zeige, daß die Sätze ($\mathcal{V}_\nu$) ($\nu \geqq 0$) für K/k richtig sind, wenn sie für K/k' richtig sind, so daß der allgemeine Nachweis auf den Spezialfall $K_T = k$ reduziert ist.

Es sei weiterhin $K_T = k$. Dann ist ($\mathcal{V}_0$) in § 2 bewiesen. Ich nehme jetzt $k' = K_0$ und zeige, daß die Sätze ($\mathcal{V}_\nu$) ($\nu \geqq 1$) für K/k richtig sind, wenn sie für K/k' richtig sind. Für K/k' ist aber $K'_0 = k'$, so daß der Nachweis weiter auf den Spezialfall $K_0 = k$ reduziert ist.

Es sei weiterhin $K_0 = k$. Dann ist ($\mathcal{V}_1$) in § 3 bewiesen. Ich nehme jetzt $k' = K_1$

---

[1]) Siehe die oben S. 170, Anm. 6 zitierte Arbeit, § 3, Satz 4.

[2]) Das Folgende ergibt sich unmittelbar aus B. I a, § 8, (11.).

[3]) Auf Grund der in der Einleitung behaupteten Sätze über die Verzweigungskörper gilt übrigens Entsprechendes (mit Durchschnittsbildung statt Komposition) auch bei Übergang von K/k zu einem Teilkörper K'/k.

und zeige, daß die Sätze $(\mathcal{V}_\nu)$ $(\nu \geqq 2)$ für K/k richtig sind, wenn die Sätze $(\mathcal{V}_\nu)$ $(\nu \geqq 1)$ für K/k' richtig sind. Für K/k' ist nun ebenfalls $K_0' = k'$, aber die Anzahl der verschiedenen Verzweigungskörper um 1 kleiner als für K/k. Es genügt daher, um die Rekursion abzuschließen, daß $(\mathcal{V}_1)$ richtig ist, wenn diese Anzahl $n = 1$ ist. Das ist aber in § 3 bewiesen.

Als Hilfsmittel für die Durchführung dieser Reduktionen entwickle ich in § 4 zwei Sätze über die Beziehungen zwischen den Führerbeiträgen eines und desselben Körpers K bezüglich zweier Grundkörper k und k'.

In § 5 werde ich dann alle die genannten Reduktionen, auf ein gemeinsames Schema gebracht, gleichzeitig ausführen und so die Sätze $(\mathcal{V}_\nu)$ beweisen, sowie anschließend leicht die Sätze $(\mathcal{V}_\nu')$ folgern.

Durch ganz das entsprechende Rekursionsverfahren werde ich weiter in § 6 die Formel (D) beweisen.

In § 7 schließlich folgere ich aus den gewonnenen Ergebnissen leicht den Satz $(\mathcal{V})$.

Der kurzen Ausdrucksweise halber treffe ich einige Bezeichnungsfestsetzungen:

Zerlegungskörper, Trägheitskörper und Verzweigungskörper beziehen sich durchweg auf das fest zugrunde gelegte Primideal $\mathfrak{p}$ oder Primteiler von $\mathfrak{p}$ in Teilkörpern von K/k. Mit $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}_0'$ seien Primteiler von $\mathfrak{p}$ in Teilkörpern k', k_0' von K/k bezeichnet, die zu einem festen Primideal $\mathfrak{P}$ von K gehören.

Ferner bezeichne $\overline{k}$ den Körper der $\mathfrak{p}$-adischen Zahlen zu k und $\overline{K}$ den Körper der $\mathfrak{P}$-adischen Zahlen zu K. Der irgendeinem Teilkörper von K/k entsprechende Teilkörper von $\overline{K}/\overline{k}$ werde ebenso durch Überstreichen gekennzeichnet. Ist der Zerlegungskörper $K_Z = k$, so bleiben Grad und Gruppe von K/k beim Übergang zu $\overline{K}/\overline{k}$ erhalten.

Dieser Übergang ist im folgenden deshalb wichtig, weil der $\mathfrak{p}$-Führer von K/k gleichzeitig die Bedeutung des Führers $\overline{\mathfrak{f}}$ der $\overline{K}$ in $\overline{k}$ zugeordneten Zahlgruppe $\overline{H}$ hat [1]). Ich nenne den letzteren wieder auch einfach den Führer von $\overline{K}/\overline{k}$ und schreibe dafür $\overline{\mathfrak{f}}\,(\overline{K}/\overline{k})$, wenn die Abhängigkeit von den Körpern $\overline{K}$ und $\overline{k}$ zum Ausdruck gebracht werden soll, entsprechend auch $\overline{H}\,(\overline{K}/\overline{k})$. Also: $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(K/k) = \overline{\mathfrak{f}}\,(\overline{K}/\overline{k})$.

Bei Potenzen eines Primideals verwende ich die Zeichen: $\leqq$, $<$, $\geqq$, $>$ für: Teiler, echter Teiler, Vielfaches, echtes Vielfaches.

§ 2. Der Verzweigungskörper über dem Trägheitskörper.

In diesem § 2 setze ich voraus, daß $K_T = k$ ist. Dann ist $\mathfrak{p}$ in jedem Teilkörper K^* von K/k von der Ordnung des Grades von K^*/k verzweigt. Daraus ergibt sich [2]), daß dann K_0 der umfassendste Teilkörper mit zu p primem Grade von K/k ist.

Unter der gemachten Voraussetzung $K_T = k$ beweise ich nun:

Satz. *Der Verzweigungskörper K_0 enthält alle Teilkörper von K/k, deren $\mathfrak{p}$-Führer höchstens $\mathfrak{p}^1$ ist. Jeder von k verschiedene Teilkörper von K_0/k hat den $\mathfrak{p}$-Führer $\mathfrak{p}^1$.*

Beweis: 1. Es sei K^* ein Teilkörper von K/k, dessen $\mathfrak{p}$-Führer höchstens $\mathfrak{p}^1$ ist. Das bedeutet, daß der Führer von $\overline{K}^*/\overline{k}$ höchstens $\mathfrak{p}^1$ ist, d. h. daß $\overline{H}^* = \overline{H}(\overline{K}^*/\overline{k})$ den Strahl $\overline{S}_1$ mod. $\mathfrak{p}^1$ aus $\overline{k}$ enthält:

$$\overline{H}^* \geqq \overline{S}_1.$$

Nach dem Diskriminanten- und Zerlegungssatz [3]) und wegen $\overline{K}_T = \overline{k}$ ist nun das Kom-

[1]) Siehe dazu N. R. II, S. 146 und S. 152.

[2]) Man beachte dazu B. I a, § 8, (12.).

[3]) N. R. II, Satz $\overline{3}$.

positum $\overline{H}^* \overline{S}_0$ von $\overline{H}^*$ mit dem Strahl $\overline{S}_0$ mod. $\mathfrak{p}^0$ aus $\overline{k}$, als $\overline{H}^*$ enthaltende Zahlgruppe vom Führer $\mathfrak{p}^0$, mit der Gruppe $\overline{A}$ aller Zahlen $\neq 0$ aus $\overline{k}$ identisch:

$$\overline{H}^* \overline{S}_0 = \overline{A}.$$

Daraus folgt nach dem Reduktionsprinzip [1]):

$$\overline{A}/\overline{H}^* = \overline{H}^* \overline{S}_0/\overline{H}^* = \overline{S}_0/\overline{H}^* \frown \overline{S}_0,$$

wo $\overline{H}^* \frown \overline{S}_0$ den Durchschnitt von $\overline{H}^*$ und $\overline{S}_0$ bezeichnet. Weil aber nach obigem

$$\overline{H}^* \frown \overline{S}_0 \geqq \overline{S}_1$$

ist, so folgt weiter, daß der Index von $\overline{H}^*$ in $\overline{A}^*$ Teiler des Index von $\overline{S}_1$ in $\overline{S}_0$, also Teiler von $N\mathfrak{p} - 1$, und somit prim zu p ist. Auf Grund des Isomorphiesatzes [2]) ist hiernach der Grad von $\overline{K}^*/\overline{k}$, d. i. wegen $K_T = k$ auch der Grad von K^*/k, prim zu p. Nach dem eingangs Gesagten ist daher K^* in K_0 enthalten.

2. Es sei K' ein Teilkörper von K_0/k. Dann ist also der Grad von K'/k, d. i. auch der Grad von $\overline{K}'/\overline{k}$ und somit der Index von $\overline{H}' = \overline{H}(\overline{K}'/\overline{k})$ in $\overline{A}$, prim zu p. Da nun der Strahl $\overline{S}_r$ mod. $\mathfrak{p}^r$ aus $\overline{k}$ im Strahl $\overline{S}_1$ als Index die Zahl $N\mathfrak{p}^r$, also eine Potenz von p hat, so ist schon $\overline{S}_1$ in $\overline{H}'$ enthalten. Hiernach ist der Führer von $\overline{H}'$, d. i. der $\mathfrak{p}$-Führer von K'/k höchstens $\mathfrak{p}^1$.

Daß dieser $\mathfrak{p}$-Führer sogar genau $\mathfrak{p}^1$ ist, wenn K' von k verschieden ist, folgt wegen $K_T = k$ unmittelbar aus dem in der Einleitung genannten Satz (T).

§ 3. Der überstrichene Verzweigungskörper über dem Verzweigungskörper.

In diesem § 3 setze ich voraus, daß $K_0 = k$ ist. Dann ist wieder $\mathfrak{p}$ in jedem Teilkörper K^* von K/k von der Ordnung des Grades von K^*/k verzweigt, und dieser Grad ist jetzt eine Potenz von p.

Für jeden Teilkörper p-ten Grades k'/k von K/k ist daher k der Verzweigungskörper, k' der überstrichene Verzweigungskörper, sodaß genau eine Verzweigungszahl v vorhanden ist. Durch sie bestimmt sich die $\mathfrak{p}$-Diskriminante von k'/k nach Formel (2.) der Einleitung so:

$$\mathfrak{d}_\mathfrak{p}(k'/k) = \mathfrak{p}^{(p-1)+v(p-1)}$$

und ferner der $\mathfrak{p}$-Führer von k'/k so [3]):

$$\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(k'/k) = \mathfrak{p}^{1+v}.$$

Ich betrachte den überstrichenen Verzweigungskörper K_1 mit der zugehörigen Verzweigungszahl v_1 und Gradzahl p^{r_1}. Er ist aus r_1 unabhängigen Körpern p-ten Grades über $K_0 = k$ zusammengesetzt [4]).

Unter der gemachten Voraussetzung $K_0 = k$ beweise ich nun:

Satz. *Der überstrichene Verzweigungskörper K_1 enthält alle Teilkörper von K/k, deren $\mathfrak{p}$-Führer höchstens $\mathfrak{p}^{1+v_1}$ ist. Jeder von k verschiedene Teilkörper von K_1/k hat den $\mathfrak{p}$-Führer $\mathfrak{p}^{1+v_1}$.*

Beweis: 1. Es sei zunächst k' ein Teilkörper p-ten Grades von K/k und v seine Verzweigungszahl. Ich zeige dann, daß $v = v_1$ oder $v > v_1$ ist, je nachdem $k' \leqq K_1$

---

[1]) B. I a, § 1, Hilfssatz 1.

[2]) N. R. II, Satz $\overline{1}$.

[3]) B. I a, §§ 9, 17, 18.

[4]) B. I a, § 8, (8.).

oder $k' \not\leqq K_1$ ist. Nach dem eingangs Gesagten wird die Behauptung des Satzes dadurch für die Teilkörper p-ten Grades von K/k bewiesen.

Um das durchzuführen, wende ich die Zwischenschaltungsformel für die Relativdiskriminanten an, die für den vorliegenden Fall so lautet:

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(K/k) = \mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(k'/k)^{p^m-1}\, \mathsf{N}_{k'k}(\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}'}(K/k')).$$

Für den Exponenten von $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(K/k)$ hat man nach Formel (2.) der Einleitung, unter Berücksichtigung von $K_0 = k$:

$$a = (p^m - 1) + v_1(p^m - p^{m-r_1}) + \cdots + v_\nu(p^{m-r_1-\cdots-r_{\nu-1}} - p^{m-r_1-\cdots-r_\nu}) + \cdots + v_n(p^{r_n} - 1).$$

Der Exponent von $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(k'/k)^{p^m-1}$ ist nach dem eingangs Gesagten:

$$b = (p^m - p^{m-1}) + v(p^m - p^{m-1}).$$

Zur Berechnung des Exponenten von $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}'}(K/k')$ nach Formel (2) der Einleitung hat man die Verzweigungskörperreihe für K/k' zu bilden. Es sei K_ν der erste Körper aus der Verzweigungskörperreihe für K/k, der den Körper k' enthält. Es ist dann

$$\text{entweder } K_{\nu-1}k' < K_\nu \text{ oder } K_{\nu-1}k' = K_\nu.$$

A. Ist $K_{\nu-1}k' < K_\nu$, so ist die Verzweigungskörperreihe für K/k' nach den Ausführungen in § 1 gegeben durch:

$$K'_0 = k',\ K'_1 = K_1k', \ldots,\ K'_{\nu-1} = K_{\nu-1}k',\ K'_\nu = K_\nu,\quad K'_{\nu+1} = K_{\nu+1}, \ldots,\ K'_n = K_n = K$$

mit den zugehörigen Verzweigungszahlen:

$$v'_1 = v_1, \ldots,\quad v'_{\nu-1} = v_{\nu-1},\quad v'_\nu = v_\nu,\quad v'_{\nu+1} = v_{\nu+1}, \ldots,\quad v'_n = v_n$$

und Exponenten der Gradzahlen:

$$r'_1 = r_1, \ldots,\quad r'_{\nu-1} = r_{\nu-1},\quad r'_\nu = r_\nu - 1,\quad r'_{\nu+1} = r_{\nu+1}, \ldots,\quad r'_n = r_n.$$

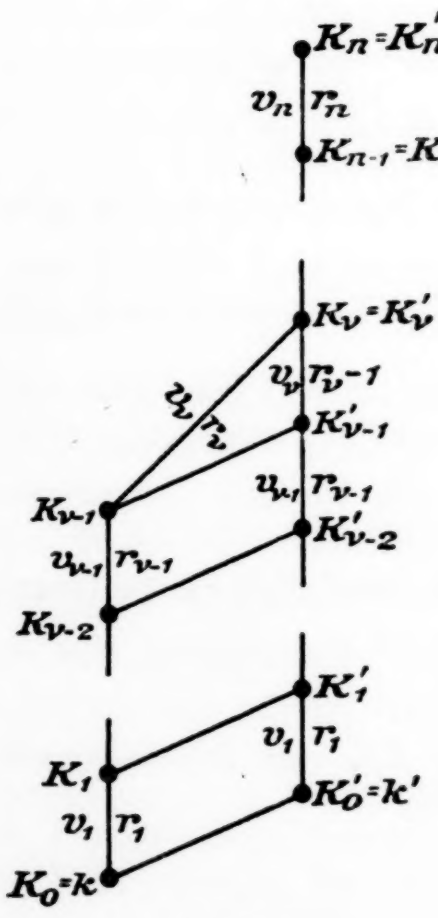

Fig. 1 A.

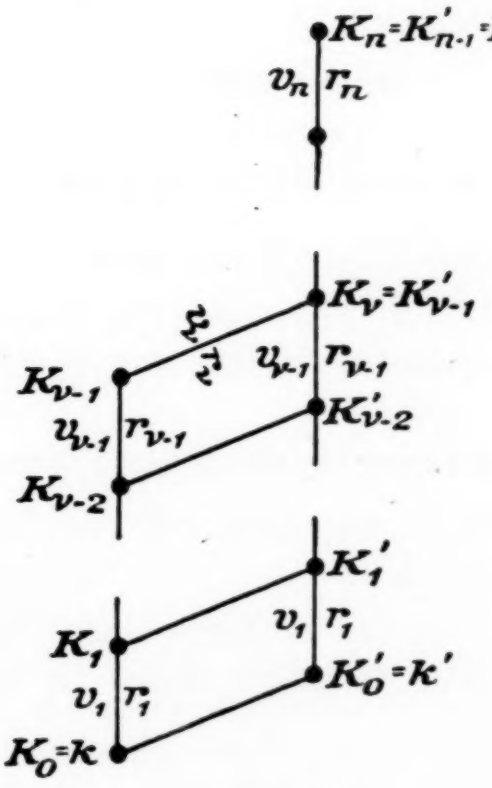

Fig. 1 B.

B. Ist aber $K_{\nu-1}k' = K_\nu$, so fällt $K'_\nu = K_\nu$ mit $v'_\nu = v_\nu$ aus, weil $r'_\nu = r_\nu - 1 = 0$ wird, und es sind dann im Vorstehenden bei den K', v', r' die Indizes $\nu+1, \ldots, n$ je um 1 zu erniedrigen.

Im ersten Falle wird der Exponent von $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}'}(K/k')$, als Potenz von $\mathfrak{p}'$:

$$c = (p^{m-1}-1) + v_1(p^{m-1} - p^{m-r_1-1}) + \cdots + v_\nu(p^{m-r_1-\cdots-r_{\nu-1}-1} - p^{m-r_1-\cdots-r_\nu}) + \cdots + v_n(p^{r_n}-1).$$

Dieser Ausdruck gilt auch im zweiten Falle, weil dann das Glied mit v_ν wegen $r_\nu = 1$ herausfällt. Den gleichen Exponenten c hat $\mathsf{N}_{k'k}(\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}'}(K/k'))$, jetzt als Potenz von $\mathfrak{p}$.

Die Zwischenschaltungsformel ergibt nun die Relation:

$$a = b + c.$$

Durch Eintragen der gefundenen Ausdrücke a, b, c berechnet sich aus ihr die Verzweigungszahl v von k'/k zu:

$$v = v_1 + \frac{v_2 - v_1}{p^{r_1}} + \cdots + \frac{v_\nu - v_{\nu-1}}{p^{r_1+\cdots+r_{\nu-1}}}.$$

Wegen (1.) der Einleitung ist hiernach in der Tat $v = v_1$ oder $v > v_1$, je nachdem $\nu = 1$ oder $\nu > 1$, d. h. je nachdem $k' \leqq K_1$ oder $k' \nleqq K_1$ ist.

2. Nach dem in 1. schon Gesagten ist zur Vollendung des Beweises nur noch zu zeigen, daß jeder nicht in K_1 enthaltene Teilkörper K^* höheren als p-ten Grades von K/k einen höheren $\mathfrak{p}$-Führer als $\mathfrak{p}^{1+v_1}$ hat. Da der Führer eines Teilkörpers von K^*/k Teiler des Führers von K^*/k ist, so genügt es, in K^*/k einen Teilkörper K'/k mit höherem $\mathfrak{p}$-Führer als $\mathfrak{p}^{1+v_1}$ nachzuweisen. Entweder leistet das nun schon ein geeigneter Teilkörper p-ten Grades von K^*/k. Oder aber alle solchen Teilkörper von K^*/k haben den $\mathfrak{p}$-Führer $\mathfrak{p}^{1+v_1}$, sind also nach 1. in K_1 enthalten. Da K^* als nicht in K_1 enthalten vorausgesetzt ist, enthält dann K^* mindestens einen zyklischen Teilkörper p^2-ten Grades K'/k. Ich zeige, daß dessen $\mathfrak{p}$-Führer dann höher als $\mathfrak{p}^{1+v_1}$ ist.

Es sei dazu k' der in K'/k enthaltene Körper p-ten Grades. Dessen $\mathfrak{p}$-Führer, d. i. der Führer von $\overline{k}'/\overline{k}$, ist nach der Annahme $\mathfrak{p}^{1+v_1}$. Es gibt also in $\overline{k}$ eine Zahl $\overline{\beta}_0 \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^{v_1}$, die nicht zu $\overline{H}(\overline{k}'/\overline{k})$ gehört. Für ein solches $\overline{\beta}_0$ ist nach dem Isomorphiesatz [1]) $\left(\frac{\overline{\beta}_0, k'}{\mathfrak{p}}\right)$ eine erzeugende Substitution von k'/k. Daraus folgt [2]), daß $\left(\frac{\overline{\beta}_0, K'}{\mathfrak{p}}\right)$ eine erzeugende Substitution von K'/k ist. Somit ist $\left(\frac{\overline{\beta}_0^p, K'}{\mathfrak{p}}\right) \neq 1$. Da aber aus $\overline{\beta}_0 \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^{v_1}$ wegen $v_1 > 0$ folgt $\overline{\beta}_0^p \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^{v_1+1}$, so ist demnach nicht jedes $\overline{\beta} \equiv 1 \bmod \mathfrak{p}^{v_1+1}$ aus $\overline{k}$ in $\overline{H}(\overline{K}'/\overline{k})$ enthalten. Der Führer von $\overline{K}'/\overline{k}$, d. i. der $\mathfrak{p}$-Führer von K'/k, ist also wirklich höher als $\mathfrak{p}^{1+v_1}$.

§ 4. Beziehungen zwischen den Führern eines Körpers bezüglich zweier Grundkörper.

In diesem § 4 mache ich keinerlei einschränkende Voraussetzung über den Abelschen Körper K/k.

Ich betrachte zunächst einen Teilkörper k' von K/k vom Primzahlgrade q, und unterscheide in geläufiger Weise die folgenden 4 Fälle:

---

[1]) N. R. II, Satz $\overline{1}$.

[2]) N. R. I, Satz 7.

0. Für k'/k ist k' der Zerlegungskörper,
also $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}_1'\cdots\mathfrak{p}_{q-1}'$ in k'.

1. Für k'/k ist k der Zerlegungskörper, k' der Trägheitskörper,
also $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ in k'.

2. Für k'/k ist k der Trägheitskörper, k' der Verzweigungskörper,
also $q \neq p$ und $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'^{q}$ in k'.

3. Für k'/k ist k der Verzweigungskörper, k' der überstrichene Verzweigungskörper,
also $q = p$ und $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'^{p}$ in k'.

Diesen vier Fällen entsprechend ist der $\mathfrak{p}$-Führer von k'/k [1]:

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(k'/k) = \mathfrak{p}^0, \quad \mathfrak{p}^0, \quad \mathfrak{p}^1, \quad \mathfrak{p}^{1+v}.$$

Ich erinnere nun an einige Tatsachen aus der Takagischen Geschlechtertheorie [2], deren Inhalt sich, unter Ausschluß des trivialen Falles 0, wie folgt zusammenfassen läßt:

I. *Für jedes $a \geqq 0$ gilt*

im Falle 1: *Aus* $\beta' \equiv 1\ mod.\ \mathfrak{p}'^{a}$ *folgt* $\mathsf{N}_{k'k}(\beta') \equiv\ mod.\ \mathfrak{p}^{a}$,
im Falle 2: *Aus* $\beta' \equiv 1\ mod.\ \mathfrak{p}'^{1+qa}$ *folgt* $\mathsf{N}_{k'k}(\beta') \equiv 1\ mod.\ \mathfrak{p}^{1+a}$,
im Falle 3: *Aus* $\beta' \equiv 1\ mod.\ \mathfrak{p}'^{1+v+pa}$ *folgt* $\mathsf{N}_{k'k}(\beta') \equiv 1\ mod.\ \mathfrak{p}^{1+v+a}$.

II. *Für jedes $a > 0$ gilt*

im Falle 1: *Aus* $\mathsf{N}_{k'k}(\beta') \equiv 1\ mod.\ \mathfrak{p}^{a-1}$ *folgt* $\beta' \equiv \alpha'^{1-\sigma}\ mod.\ \mathfrak{p}'^{a-1}$,
im Falle 2: *Aus* $\mathsf{N}_{k'k}(\beta') \equiv 1\ mod\ \mathfrak{p}^{a}$ *folgt* $\beta' \equiv \alpha'^{1-\sigma}\ mod.\ \mathfrak{p}^{qa}$,
im Falle 3: *Aus* $\mathsf{N}_{k'k}(\beta') \equiv 1\ mod.\ \mathfrak{p}^{v+a}$ *folgt* $\beta' \equiv \alpha'^{1-\sigma}\ mod.\ \mathfrak{p}'^{v+pa}$.

Dabei bezeichnen α', β' Zahlen aus k' und σ eine erzeugende Substitution von k'/k.

Mittels dieser Tatsachen beweise ich nun den folgenden, für alles weitere grundlegenden

Satz 1. *Es sei k' ein solcher Teilkörper von K/k vom Primzahlgrade q, der entweder den Zerlegungskörper K_Z enthält oder in ihm enthalten ist.*

Wenn dann $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(K/k) > \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(k'/k)$ ist (d. h. $a > 0$ in den nachstehenden Relationen), so berechnet sich $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k')$ auf folgende Weise:

Ist im Falle 0 *oder* 1 $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(K/k) = \mathfrak{p}^{a}$, *so ist* $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k') = \mathfrak{p}'^{a}$,
Ist im Falle 2 $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(K/k) = \mathfrak{p}^{1+a}$, *so ist* $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k') = \mathfrak{p}'^{1+qa}$,
Ist im Falle 3 $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(K/k) = \mathfrak{p}^{1+v+a}$, *so ist* $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k') = \mathfrak{p}'^{1+v+pa}$.

Wenn aber $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(K/k) = \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(k'/k)$ ist (d. h. $a = 0$), so ist $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k')$ jedenfalls höchstens gleich der eben angegebenen Potenz von $\mathfrak{p}'$.

Bemerkung: Da auf alle Fälle $\mathfrak{f}(k'/k)$ Teiler von $\mathfrak{f}(K/k)$ ist, liegt stets einer der beiden in Satz 1 unterschiedenen Fälle vor.

Beweis: A. Es sei zunächst $K_Z > k$. Dann ist nach der gemachten Voraussetzung $K_Z \geqq k'$. Für k'/k liegt also der Fall 0 vor, und es ist $\overline{k}' = \overline{k}$. Daher ist $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k') = \overline{\mathfrak{f}}(\overline{K}/\overline{k}')$ dieselbe Potenz von $\mathfrak{p}'$, wie $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(K/k) = \overline{\mathfrak{f}}(\overline{K}/\overline{k})$ von $\mathfrak{p}$.

---

[1]) B. I a, §§ 9, 17, 18.

[2]) T., § 14, Hilfssätze 1, 2 und B. I a, § 19, Satz 21. — Ich brauche im folgenden eine möglichst scharfe Formulierung dieser Tatsachen. Von den nachstehenden Relationen siehe I 3 in B. I a (in T. nicht so scharf), aber II 3 in T. (in B. I a nicht so scharf); II 2 steht weder in T. noch in B. I a in der hier gegebenen schärfsten Formulierung, die man aber leicht mit den dortigen Methoden herleitet.

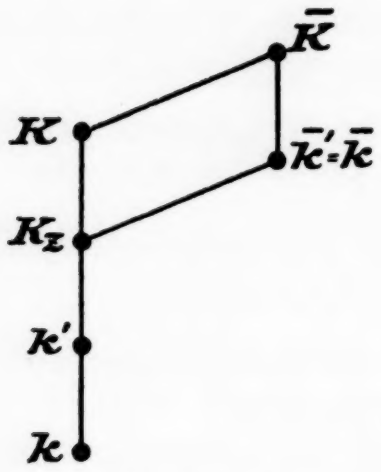

Fig. 2A.

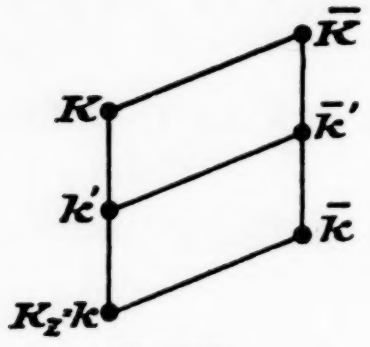

Fig. 2B.

B. Es sei jetzt $K_Z = k$. Dann liegt für k'/k einer der Fälle 1—3 vor.

Als Führer von $\overline{K}/\overline{k}$ ist $\mathfrak{f}_\mathfrak{p} = \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(K/k)$ durch die folgenden beiden Relationen charakterisiert:

(a.) Jedes $\overline{\beta} \equiv 1 \bmod. \mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ aus $\overline{k}$ liegt in $\overline{H}(\overline{K}/\overline{k})$.

(b.) Es gibt ein $\overline{\beta}_0 \equiv 1 \bmod. \dfrac{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}$ in $\overline{k}$, das nicht in $\overline{H}(\overline{K}/\overline{k})$ liegt.

Entsprechend wird, wenn für den Beweis $\mathfrak{f}'_{\mathfrak{p}'}$ die in Satz 1 angegebene Potenz von $\mathfrak{p}'$ bezeichnet, diese Potenz als Führer von $\overline{K}/\overline{k}'$, d. i. als $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k')$ erwiesen sein, wenn die folgenden beiden Relationen festgestellt sind:

(a'.) Jedes $\overline{\beta}' \equiv 1 \bmod. \mathfrak{f}'_{\mathfrak{p}'}$ aus $\overline{k}'$ liegt in $\overline{H}(\overline{K}/\overline{k}')$.

(b'.) Es gibt ein $\overline{\beta}'_0 \equiv 1 \bmod. \dfrac{\mathfrak{f}'_{\mathfrak{p}'}}{\mathfrak{p}'}$ in $\overline{k}'$, das nicht in $\overline{H}(\overline{K}/\overline{k}')$ liegt.

Wird nur die erste dieser Relationen festgestellt, so ist dadurch $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k') \leqq \mathfrak{f}'_{\mathfrak{p}'}$ erwiesen.

Diese Feststellungen beruhen nun darauf, daß die Potenzen $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{f}'_{\mathfrak{p}'}$ in Satz 1 gerade die in den Relationen I auftretenden Potenzen sind, während in den Relationen II gerade die Potenzen $\dfrac{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}$, $\dfrac{\mathfrak{f}'_{\mathfrak{p}'}}{\mathfrak{p}'}$ auftreten. Nach I gilt also [1]):

(1.) Aus $\overline{\beta}' \equiv 1 \bmod. \mathfrak{f}'_{\mathfrak{p}'}$ folgt $\mathsf{N}_{\overline{k}'\overline{k}}(\overline{\beta}') \equiv 1 \bmod. \mathfrak{f}_\mathfrak{p}$; und, falls $a > 0$, nach II:

(2.) Aus $\mathsf{N}_{\overline{k}'\overline{k}}(\overline{\beta}') \equiv 1 \bmod. \dfrac{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}$ folgt $\overline{\beta}' \equiv \overline{\alpha}'^{1-\sigma} \bmod. \dfrac{\mathfrak{f}'_{\mathfrak{p}'}}{\mathfrak{p}'}$.

Mittels dieser Tatsachen werden nun die Feststellungen (a'.) und (b'.) wie folgt erbracht:

(a'.) Aus

$$\overline{\beta}' \equiv 1 \bmod. \mathfrak{f}'_{\mathfrak{p}'}$$

folgt zunächst nach (1.):

$$\mathsf{N}_{\overline{k}'\overline{k}}(\overline{\beta}') \equiv 1 \bmod. \mathfrak{f}_\mathfrak{p}.$$

Nach (a.) ist daher:

$$\mathsf{N}_{\overline{k}'\overline{k}}(\overline{\beta}') = \mathsf{N}_{\overline{K}\overline{k}}(\overline{\mathsf{B}}) = \mathsf{N}_{\overline{k}'\overline{k}}(\mathsf{N}_{\overline{K}'\overline{k}'}(\overline{\mathsf{B}}))$$

mit $\overline{\mathsf{B}}$ aus $\overline{K}$, oder auch:

$$\mathsf{N}_{\overline{k}'\overline{k}}\left(\frac{\overline{\beta}'}{\mathsf{N}_{\overline{K}\overline{k}'}(\overline{\mathsf{B}})}\right) = 1.$$

---

[1]) Die Relationen I, II sind als bloße Restklassenaussagen, und weil im jetzigen Falle beim Übergang zu $\overline{k}'/\overline{k}$ Grad und Gruppe von k'/k erhalten bleiben, auch für $\overline{k}'/\overline{k}$ statt k'/k gültig.

Weil $\overline{k}'/\overline{k}$ zyklisch ist, ergibt sich daraus nach einem Hilbertschen Satze [1]):

$$\frac{\overline{\beta}'}{\mathsf{N}_{\overline{k}\overline{k}'}(\overline{\mathsf{B}})} = \overline{\alpha}'^{1-\sigma}$$

mit $\overline{\alpha}'$ aus $\overline{k}'$, oder auch:

$$\overline{\beta}' = \overline{\alpha}'^{1-\sigma}\,\mathsf{N}_{\overline{K}\overline{k}'}(\overline{\mathsf{B}}).$$

Nun ist aber $\overline{\alpha}'^{1-\sigma}$ in $\overline{H}(\overline{K}/\overline{k}')$ enthalten [2]). Dasselbe gilt daher auch von $\overline{\beta}'$.

(b'.) Ist gemäß (b.)

$$\overline{\beta}_0 \equiv 1 \bmod. \frac{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}$$

und nicht in $\overline{H}(\overline{K}/\overline{k})$ enthalten, so ist — wenn jetzt $\mathfrak{f}_\mathfrak{p} = \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(K/k) > \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(k'/k)$ vorausgesetzt wird — jedenfalls

$$\overline{\beta}_0 \equiv 1 \bmod. \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(k'/k).$$

Nach der (a.) für $\overline{k}'/\overline{k}$ entsprechenden Tatsache ist also:

$$\overline{\beta}_0 = \mathsf{N}_{\overline{k}'\overline{k}}(\overline{\beta}'_0)$$

mit einer Zahl $\overline{\beta}'_0$ aus $\overline{k}'$, die dann, nach Wahl von $\overline{\beta}_0$, sicher nicht zu $\overline{H}(\overline{K}/\overline{k}')$ gehört. Für diese Zahl $\overline{\beta}'_0$ gilt nun:

$$\mathsf{N}_{\overline{k}'\overline{k}}(\overline{\beta}'_0) \equiv 1 \bmod. \frac{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}},$$

und daher nach (2.):

$$\overline{\beta}'_0 \equiv \overline{\alpha}'^{1-\sigma} \bmod. \frac{\mathfrak{f}'_{\mathfrak{p}'}}{\mathfrak{p}'},$$

oder auch

$$\frac{\overline{\beta}'_0}{\overline{\alpha}'^{1-\sigma}} \equiv 1 \bmod. \frac{\mathfrak{f}'_{\mathfrak{p}'}}{\mathfrak{p}'}.$$

Da aber, wie vorher bemerkt, $\overline{\alpha}'^{1-\sigma}$ in $\overline{H}(\overline{K}/\overline{k}')$ liegt, so liegt wie $\overline{\beta}'_0$ auch $\frac{\overline{\beta}'_0}{\overline{\alpha}'^{1-\sigma}}$ nicht in $\overline{H}(\overline{K}/\overline{k}')$.

Wie schon ausgeführt, ist damit der Beweis für Satz 1 erbracht. Die durch Satz 1 ausgesagte Beziehung läßt sich auf eine kürzere Form bringen. Man beachte dazu, daß sich nach Formel (2.) der Einleitung die $\mathfrak{p}$-Diskriminante $\mathfrak{d}_\mathfrak{p}(k'/k)$ den obigen vier Fällen entsprechend so ausdrückt:

$$\mathfrak{d}_\mathfrak{p}(k'/k) = \mathfrak{p}^0, \quad \mathfrak{p}^0, \quad \mathfrak{p}^{q-1}, \quad \mathfrak{p}^{(p-1)+v(p-1)}$$

und dementsprechend die $\mathfrak{p}'$-Differente $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}'}(k'/k)$ so:

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}'}(k'/k) = \mathfrak{p}'^0, \quad \mathfrak{p}'^0, \quad \mathfrak{p}'^{q-1}, \quad \mathfrak{p}'^{(p-1)+v(p-1)}.$$

Unter Berücksichtigung von

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'\mathfrak{p}'_1 \cdots \mathfrak{p}'_{q-1}, \quad \mathfrak{p}', \quad \mathfrak{p}'^q, \quad \mathfrak{p}'^p,$$

läßt sich dann die Beziehung zwischen $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(K/k)$ und $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k')$ in Satz 1 auf die Form bringen:

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k) = \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}'}(k'/k)\,\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k'), \text{ falls } \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(K/k) > \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(k'/k),$$
$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k) \geqq \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}'}(k'/k)\,\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k'), \text{ falls } \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(K/k) = \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(k'/k).$$

---

[1]) *D. Hilbert*, „Zahlbericht", Satz 90. — Der Beweis dieses Satzes gilt wörtlich für zyklische Körper (sogar beliebigen Grades) über abstrakten Grundkörpern.

[2]) N. R. II, Satz $\overline{5}$.

Mit Rücksicht auf den Fall 0 ist dabei auch von $\mathfrak{f}(K/k)$ nur der $\mathfrak{p}'$-Beitrag $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k)$ statt wie bisher der $\mathfrak{p}$-Beitrag $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(K/k)$ zu nehmen.

Ich befreie nunmehr Satz 1 von der Voraussetzung, daß k'/k von Primzahlgrad ist, indem ich allgemein beweise:

Satz 2. *Es sei k' ein solcher Teilkörper von K/k, der entweder den Zerlegungskörper K_Z enthält oder in ihm enthalten ist.*

Wenn dann $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(K/k) > \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(k'/k)$ *ist, so gilt*

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k) = \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}'}(k'/k)\,\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k').$$

Wenn aber $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(K/k) = \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(k'/k)$ *ist, so gilt jedenfalls*

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k) \geqq \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}'}(k'/k)\,\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k').$$

Beweis: Nachdem zuvor Ausgeführten ist Satz 2 richtig, wenn der Grad von k'/k eine Primzahl ist. Angenommen, Satz 2 sei bereits bewiesen, wenn dieser Grad ein Produkt von $r-1$ Primzahlen ist, und er sei jetzt ein Produkt von r Primzahlen. Dann läßt sich ein Teilkörper k_0' von k'/k wählen, dessen Grad über k ein Produkt von $r-1$ Primzahlen ist, und der den Zerlegungskörper K_Z enthält, falls $K_Z < k'$ ist. Die den Zerlegungskörper betreffende Voraussetzung ist dann, sowohl für die Anwendung von Satz 1 auf k_0', k', K, als auch für die Anwendung von Satz 2 auf k, k_0', K und auch auf k, k_0', k' erfüllt. Ferner ist $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(k_0'/k) \leqq \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(k'/k)$, also

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(k_0'/k) < \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(K/k) \text{ [oder jedenfalls } \leqq \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(K/k)],$$

je nachdem der erste [oder der zweite] der in Satz 2 unterschiedenen Fälle vorliegt.

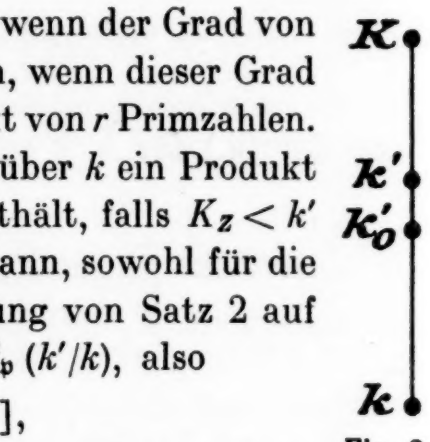

Fig. 3.

Gemäß der Induktionsannahme ergibt daher die Anwendung von Satz 2 auf k, k_0', K:

(1) $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_0'}(K/k) = \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_0'}(k_0'/k)\,\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_0'}(K/k_0')$ [oder jedenfalls $\geqq \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_0'}(k_0'/k)\,\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_0'}(K/k_0')$].

Ferner ergibt die Anwendung von Satz 2 auf k, k_0', k':

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_0'}(k'/k) \geqq \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_0'}(k_0'/k)\,\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_0'}(k'/k_0').$$

Insbesondere folgt durch Vergleich dieser beiden Relationen, daß im ersten Falle des Satzes 2 auch

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_0'}(K/k_0') > \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}_0'}(k'/k_0')$$

ist, daß also dann bei der Anwendung von Satz 1 auf k_0', k', K ebenfalls dessen erster Fall vorliegt. Diese Anwendung ergibt dann:

(2) $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k_0') = \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}'}(k'/k_0')\,\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k')$ [oder jedenfalls $\geqq \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}'}(k'/k_0')\,\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K/k')$].

Nach der Zwischenschaltungsformel für die Relativdifferenten:

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}'}(k'/k) = \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}'}(k_0'/k)\,\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}'}(k'/k_0')$$

ergibt sich aus den Relationen (1) und (2) die Richtigkeit der Behauptungen von Satz 2 für k, k', K.

Damit ist Satz 2 durch vollständige Induktion bewiesen.

§ 5. Beweis der Sätze $(\mathcal{U}_\nu)$ und $(\mathcal{U}_\nu')$.

Es sei k' ein Teilkörper von K/k, mit dem $\mathfrak{p}$-Führer

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(k'/k) = \mathfrak{p}^a,$$

dem die folgenden Eigenschaften zukommen:

I. k' enthält alle Teilkörper von K/k, deren $\mathfrak{p}$-Führer höchstens $\mathfrak{p}^a$ ist. Jeder von k verschiedene Teilkörper von k'/k hat den $\mathfrak{p}$-Führer $\mathfrak{p}^a$.

II. k' enthält den Zerlegungskörper K_Z.

Nach den Sätzen aus §§ 2, 3 ist die Voraussetzung I erfüllt:

1. für $k' = K_T$,
2. für $k' = K_0$, wenn $k = K_T < K_0$,
3. für $k' = K_1$, wenn $k = K_0$.

Auch die Voraussetzung II ist dann erfüllt.

Ich betrachte jetzt die sämtlichen Teilkörper $K^* > k$ von K/k. Jedem solchen ordne ich einer bestimmten Teilkörper K' von K/k' zu, nämlich das Kompositum

$$K' = K^* k'.$$

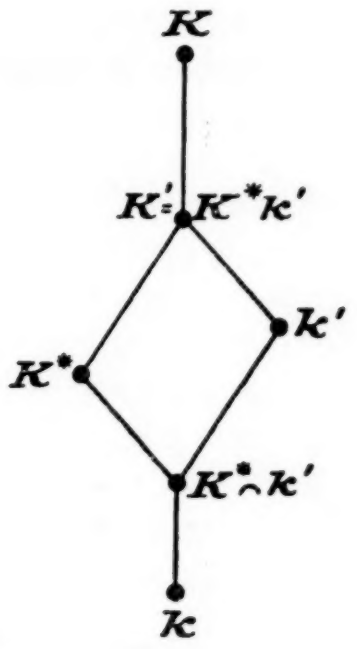

Fig. 4.

Umgekehrt entsteht so auch jeder Teilkörper K' von K/k' mindestens einmal (nämlich sicher aus $K^* = K'$), und es ist dann und nur dann $K' > k'$, wenn $K^* \nleqq k'$ ist.

Für die vollen Führer gilt dabei [1]):

$$\mathfrak{f}(K'/k) = M(\mathfrak{f}(K^*/k), \mathfrak{f}(k'/k)),$$

und daher für die $\mathfrak{p}$-Führer:

$$\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(K'/k) = \mathrm{Max}(\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(K^*/k), \mathfrak{p}^a).$$

Nach der Voraussetzung I ergibt sich daraus:

$$\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(K^*/k) = \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(K'/k) > \mathfrak{p}^a, \text{ wenn } K' > k', \text{ d. i. } K^* \nleqq k',$$
$$\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(K^*/k) = \mathfrak{p}^a, \qquad \text{wenn } K' = k', \text{ d. h. } k < K^* \leqq k'.$$

Hiernach entsteht die Menge aller verschiedenen $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(K^*/k)$ mit $k < K^* \leqq K$ aus der Menge aller verschiedenen $f_\mathfrak{p}(K'/k')$ mit $k' < K' \leqq K$, indem nur noch die Potenz $\mathfrak{p}^a$ hinzugenommen wird, die niedriger ist als alle übrigen.

Nach der Voraussetzung II ist Satz 2 aus § 4 auf k, k', K' anwendbar, und nach der Voraussetzung I liegt der dortige erste Fall vor, wenn $K' > k'$. Dann gilt also:

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K'/k) = \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(K'/k')\, \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}'}(k'/k).$$

Die $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K'/k')$ entstehen hiernach aus den $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K'/k)$ sämtlich durch Wegdivision eines und desselben Bestandteils $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}'}(k'/k)$.

Zusammengenommen resultiert so, daß die Menge aller verschiedenen $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(K^*/k)$ mit $k < K^* \leqq K$, von ihrer niedrigsten Potenz $\mathfrak{p}^a$ abgesehen, in eineindeutiger, die Anordnung nach der Höhe erhaltender Zuordnung steht zur Menge aller verschiedenen $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K'/k')$ mit $k' < K' \leqq K$.

Es habe nun für eine gegebene Potenz $\mathfrak{p}'^{r'}$ der Teilkörper $\widehat{K} > k'$ von K/k' die Eigenschaft:

---

[1]) B. I, § 3, S. 9 oben und § 6, Satz 11.

$\widehat{K}$ enthält alle Teilkörper K' von K/k', deren $\mathfrak{p}'$-Führer höchstens $\mathfrak{p}'^{r'}$ ist, und hat selbst den $\mathfrak{p}'$-Führer $\mathfrak{p}'^{r'}$.

Ist dann die Potenz $\mathfrak{p}^r$ zu $\mathfrak{p}'^{r'}$ ebenso zugeordnet, wie nach obigem $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(K'/k)$ zu $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(K'/k')$, d. h.

$$\mathfrak{p}'^{r} = \mathfrak{p}'^{r'}\,\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}'}(k'/k),$$

so hat auf Grund der vorstehenden Ausführungen $\widehat{K}$ auch die Eigenschaft:

$\widehat{K}$ enthält alle Teilkörper K^* von K/k, deren $\mathfrak{p}$-Führer höchstens $\mathfrak{p}^r$ ist, und hat selbst den $\mathfrak{p}$-Führer $\mathfrak{p}^r$.

Damit ist der in § 1 skizzierte Reduktionsbeweis für die Sätze $(\mathcal{U}_\nu)$ vervollständigt.

Der Beweis der Sätze $(\mathcal{U}'_\nu)$ ist nur noch für $\nu \geqq 1$ zu führen. Es sei der Voraussetzung gemäß $K_{\nu-1} \leqq k' < K' \leqq K_\nu$. Sowohl für K/k' als auch für K'/k' ist dann k' der Verzweigungskörper, so daß beidemal der Satz aus § 3 anwendbar ist.

Für K/k' ist nach § 1 K_ν der überstrichene Verzweigungskörper und v_ν die zugehörige Verzweigungszahl. Der Satz aus § 3 ergibt also, daß alle Teilkörper $> k'$ von K_ν/k' den $\mathfrak{p}'$-Führer $\mathfrak{p}'^{1+v_\nu}$ haben. Daraus folgt a fortiori, daß alle Teilkörper $> k'$ von K'/k' den $\mathfrak{p}'$-Führer $\mathfrak{p}'^{1+v_\nu}$ haben. Nach dem Satz aus § 3 muß daher für K'/k' der überstrichene Verzweigungsskörper K' und die zugehörige Verzweigungszahl v_ν sein.

Damit sind auch die Sätze $(\mathcal{U}'_\nu)$ bewiesen.

§ 6. Beweis der Formel (D).

Es sei wieder k' ein Teilkörper von K/k, dem die beiden in § 5 genannten Eigenschaften I und II zukommen.

Zur Abkürzung werde $H = H(K/k)$ und $U = H(k'/k)$ gesetzt. Dabei sei auch U nach dem Führer $\mathfrak{f}(K/k)$ von H erklärt, was wegen $U \geqq H$ möglich ist. Es seien ferner h und u die Indizes von H und U in der Gruppe A aller zu $\mathfrak{f}(K/k)$ primen Ideale aus k, gleichzeitig die Grade von K/k und k'/k.

Jeder der h Charaktere χ der Klassengruppe A/H induziert einen Charakter ψ der Untergruppe U/H. Zwei Charaktere χ induzieren dann und nur dann denselben Charakter ψ, wenn ihr Quotient den Hauptcharakter ψ_1 von U/H induziert, d. h. einer der u Charaktere der Klassengruppe A/U ist. Hiernach induzieren immer genau u Charaktere χ einen und denselben Charakter ψ, und jeder der $\frac{h}{u}$ Charaktere ψ wird wirklich durch u Charaktere χ induziert.

Unter dem Führer $\mathfrak{f}(\psi)$ werde der Führer der durch $\psi(\mathfrak{a}) = 1$ definierten Untergruppe $H(\psi)$ von U verstanden. Ist ψ durch χ induziert, so ist

$$H(\psi) = H(\chi) \frown U,$$

daher

$$\mathfrak{f}(\psi) = M(\mathfrak{f}(\chi),\ \mathfrak{f}(k'/k)),$$

also

$$\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\psi) = \mathrm{Max}\,(\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\chi),\ \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(k'/k)).$$

Induziert nun χ den Hauptcharakter ψ_1, so ist $H(\chi) \geqq U$, also der $H(\chi)$ zugeordnete Klassenkörper $K(\chi) \leqq k'$, und folglich nach der Voraussetzung I aus § 5:

$$\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\chi) = \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(k'/k),$$

wenn nur χ vom Hauptcharakter χ_1 verschieden ist. Solche Charaktere gibt es $u - 1$. Für χ_1 ist natürlich:

$$\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\chi_1) = 1.$$

Induziert aber χ nicht den Hauptcharakter ψ_1, so ist $H(\chi) \geqq U$, also $K(\chi) \leqq k'$, folglich nach der Voraussetzung I aus § 5 $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\chi) > \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(k'/k)$, und daher nach obiger Formel:

$$\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\chi) = \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\psi).$$

Zusammengenommen resultiert so für das zu untersuchende Führerprodukt die Umformung:

$$\prod_\chi \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\chi) = \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(k'/k)^{u-1} \prod_{\psi \neq \psi_1} \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\psi)^u.$$

Weiter werde zur Abkürzung $H' = H(K/k')$ gesetzt. Auch H' kann mod. $\mathfrak{f}(K/k)$ erklärt werden, nämlich als die Gesamtheit derjenigen zu $\mathfrak{f}(K/k)$ primen Ideale aus k', deren Normen nach k in H fallen [1]). Bezeichnet A' die Gruppe aller zu $\mathfrak{f}(K/k)$ primen Ideale aus k', so wird daher nach dem Isomorphieprinzip [2]) die Klassengruppe A'/H' durch Normbildung nach k isomorph auf die Gruppe U/H abgebildet. Insbesondere werden dabei die Charaktere ψ von U/H auf die Charaktere χ' von A'/H' bezogen. Hängen ψ und χ' so zusammen, ist also $\chi'(\mathfrak{a}') = \psi(\mathsf{N}_{k'k}(\mathfrak{a}'))$, so ist der $H(\psi)$ zugeordnete Klassenkörper $K(\psi)$ gleichzeitig auch der Klassenkörper $K(\chi')$ zu der durch $\chi'(\mathfrak{a}') = 1$ definierten Idealgruppe $H(\chi')$ in k'; denn $H(\chi')$ besteht dann aus der Gesamtheit derjenigen zu $\mathfrak{f}(K/k)$ primen Ideale aus k', deren Normen nach k in $H(\psi)$ fallen. Die Führer $\mathfrak{f}(\psi)$ und $\mathfrak{f}(\chi')$ von $H(\psi)$ und $H(\chi')$ sind also die Führer eines und desselben Körpers $K(\psi) = K(\chi')$ bezüglich der beiden Grundkörper k und k'.

Nach den Voraussetzungen I und II aus § 5 ist dann der Satz 2 aus § 4 anwendbar. Er liefert:

$$\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(\psi) = \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}'}(k'/k)\, \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(\chi').$$

Bildet man hierin das Produkt über alle Primteiler $\mathfrak{p}'$ von $\mathfrak{p}$ in k', so wird weiter:

$$\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\psi) = \mathfrak{D}_\mathfrak{p}(k'/k) \prod \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(\chi').$$

$$\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\psi) = \mathfrak{D}_\mathfrak{p}(k'/k) \prod_{\mathfrak{p}'|\mathfrak{p}} \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(\chi').$$

Geht man ferner zur Norm nach k über, oder — was wegen der Symmetrie in den $\mathfrak{p}'$ dasselbe ist — zur u-ten Potenz, so wird:

$$\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\psi)^u = \mathfrak{d}_\mathfrak{p}(k'/k)\, \mathsf{N}_{k'k}\Big(\prod_{\mathfrak{p}'|\mathfrak{p}} \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(\chi')\Big).$$

Trägt man dies in die oben erhaltene Umformung ein und beachtet, daß das Produkt über die $\psi \neq \psi_1$ durch das Produkt über die $\chi' \neq \chi_1'$ oder auch über alle χ' ersetzt werden darf, so erhält man für das zu untersuchende Führerprodukt die weitere Umformung:

$$\prod_\chi \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\chi) = \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(k'/k)^{u-1}\, \mathfrak{d}_\mathfrak{p}(k'/k)^{\frac{h}{u}-1}\, \mathsf{N}_{k'k}\Big(\prod_{\mathfrak{p}'|\mathfrak{p}} \prod_{\chi'} \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(\chi')\Big),$$

oder schließlich:

$$\prod_\chi \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\chi) = \frac{\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(k'/k)^{u-1}}{\mathfrak{d}_\mathfrak{p}(k'/k)}\, \mathfrak{d}_\mathfrak{p}(k'/k)^{\frac{h}{u}}\, \mathsf{N}_{k'k}\Big(\prod_{\mathfrak{p}'|\mathfrak{p}} \prod_{\chi'} \mathfrak{f}_{\mathfrak{p}'}(\chi')\Big).$$

Diese Formel vergleiche ich nun mit der Zwischenschaltungsformel für die Relativdiskriminanten:

$$\mathfrak{d}_\mathfrak{p}(K/k) = \mathfrak{d}_\mathfrak{p}(k'/k)^{\frac{h}{u}}\, \mathsf{N}_{k'k}\Big(\prod_{\mathfrak{p}'|\mathfrak{p}} \mathfrak{d}_{\mathfrak{p}'}(K/k')\Big).$$

Zum Beweise der behaupteten Formel:

(D) $$\mathfrak{d}_\mathfrak{p}(K/k) = \prod_\chi \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\chi)$$

für K/k genügt es hiernach, erstens diese Formel für K/k' und zweitens die Formel

(D′) $$\mathfrak{d}_\mathfrak{p}(k'/k) = \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(k'/k)^{u-1}$$

[1]) Siehe dazu *H. Hasse* und *A. Scholz*, Zur Klassenkörpertheorie auf Takagischer Grundlage, Math.Zeitschr. 29 (1928), Beweis zu Satz 2.

[2]) B. I a, § 1, Hilfssatz 2.

zu beweisen. Die letztere Formel ist nichts anderes, als die Formel (D) für k'/k. Denn nach der Voraussetzung I in § 5 haben für k'/k alle vom Hauptcharakter verschiedenen Charaktere den $\mathfrak{p}$-Führer $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(k'/k)$.

Nach dem in § 1 skizzierten Rekursionsschema genügt es also, die Formel (D′) in den drei zu Beginn von § 5 aufgeführten Fällen:

$$k' = K_T; \qquad k = K_T,\ k' = K_0 > K_T; \qquad k = K_0,\ k' = K_1$$

zu beweisen. Nun ist diesen drei Fällen entsprechend einerseits nach Formel (2) der Einleitung:

$$\mathfrak{d}_\mathfrak{p}(k'/k) = \mathfrak{p}^0, \qquad \mathfrak{d}_\mathfrak{p}(k'/k) = \mathfrak{p}^{e_0-1}, \qquad \mathfrak{d}_\mathfrak{p}(k'/k) = \mathfrak{p}^{(p^{r_1}-1)(1+v_1)},$$

andererseits nach den Sätzen (T), $(\mathcal{V}_0)$, $(\mathcal{V}_1)$:

$$\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(k'/k) = \mathfrak{p}^0, \qquad \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(k'/k) = \mathfrak{p}^1, \qquad \mathfrak{f}_\mathfrak{p}(k'/k) = \mathfrak{p}^{1+v_1}.$$

Weil entsprechend

$$u = gf, \qquad u = e_0, \qquad u = p^{r_1}$$

ist, ist damit der Beweis beendet.

§ 7. Beweis des Satzes $(\mathcal{V})$.

Ich wende einerseits die Formel (D) auf K_ν/k an. Nach den Sätzen (T), $(\mathcal{V}_0)$, $(\mathcal{V}_\mu)$ $(1 \leqq \mu \leqq \nu)$ wird dabei:

$\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\chi) = \mathfrak{p}^0$ für die gf Charaktere χ mit $K(\chi) \leqq K_T$,
$\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\chi) = \mathfrak{p}^1$ „ „ $gfe_0 - gf$ „ „ „ $K(\chi) \leqq K_0,\ K(\chi) \not\leqq K_T$,
$\mathfrak{f}_\mathfrak{p}(\chi) = \mathfrak{p}^{1+a_\mu}$ „ „ $gfe_0p^{r_1+\cdots+r_\mu} - gfe_0p^{r_1+\cdots+r_{\mu-1}}$ „ „ „ $K(\chi) \leqq K_\mu,\ K(\chi) \not\leqq K_{\mu-1}$.

Die Formel (D) ergibt also für den Exponenten von $\mathfrak{d}_\mathfrak{p}(K_\nu/k)$:

$$\begin{aligned} gf\,[&(e_0-1)+(1+a_1)e_0(p^{r_1}-1)+(1+a_2)e_0(p^{r_1+r_2}-p^{r_1})+\cdots \\ &+(1+a_\nu)e_0(p^{r_1+\cdots+r_\nu}-p^{r_1+\cdots+r_{\nu-1}})] \\ = gf\,[&(e_0p^{r_1+\cdots+r_\nu}-1)+a_1e_0(p^{r_1}-1)+a_2e_0(p^{r_1+r_2}-p^{r_1})+\cdots \\ &+a_\nu e_0(p^{r_1+\cdots+r_\nu}-p^{r_1+\cdots+r_{\nu-1}}). \end{aligned}$$

Andererseits wende ich die Formel (2) der Einleitung auf K_ν/k an. Nach den Sätzen (T), $(\mathcal{V}_0)$, $(\mathcal{V}_\mu)$ $(1 \leqq \mu \leqq \nu)$ sind K_T, K_0 und die K_μ Trägheitskörper, Verzweigungskörper und die überstrichenen Verzweigungskörper für K_ν/k, und nach den Sätzen $(\mathcal{V}'_\mu)$ sind die v_μ die zugehörigen Verzweigungszahlen. Die Formel (2) der Einleitung ergibt also für den Exponenten von $\mathfrak{d}_\mathfrak{p}(K_\nu/k)$:

$$\begin{aligned} gf\,[&(e_0p^{r_1+\cdots+r_\nu}-1)+v_1(p^{r_1+\cdots+r_\nu}-1)+(v_2-v_1)(p^{r_2+\cdots+r_\nu}-1)+\cdots \\ &+(v_\nu-v_{\nu-1})(p^{r_\nu}-1)]. \end{aligned}$$

Der Vergleich für $\nu = 1, \ldots, n$ ergibt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &a_1e_0(p^{r_1}-1)+a_2e_0(p^{r_1+r_2}-p^{r_1})+\cdots+a_\nu e_0(p^{r_1+\cdots+r_\nu}-p^{r_1+\cdots+r_{\nu-1}}) \\ &\quad = v_1(p^{r_1+\cdots+r_\nu}-1)+(v_2-v_1)(p^{r_2+\cdots+r_\nu}-1)+\cdots+(v_\nu-v_{\nu-1})(p^{r_\nu}-1). \end{aligned}$$

Subtrahiert man die $(\nu-1)$-te Gleichung von der ν-ten, so erhält man:

$$\begin{aligned} a_\nu e_0p^{r_1+\cdots+r_{\nu-1}}(p^{r_\nu}-1) = {}& v_1p^{r_1+\cdots+r_{\nu-1}}(p^{r_\nu}-1)+(v_2-v_1)p^{r_2+\cdots+r_{\nu-1}}(p^{r_\nu}-1)+\cdots \\ &+(v_\nu-v_{\nu-1})(p^{r_\nu}-1), \end{aligned}$$

also in der Tat:

$$a_\nu = \frac{v_1}{e_0}+\frac{v_2-v_1}{e_0p^{r_1}}+\cdots+\frac{v_\nu-v_{\nu-1}}{e_0p^{r_1+\cdots+r_{\nu-1}}},$$

wie in $(\mathcal{V})$ behauptet. Die dort behaupteten Kongruenzen ergeben sich aus der Ganzzahligkeit der a_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$.

Halle, 25. März 1929.

Eingegangen 25. März 1929.

Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Von *E. Kamke* in Tübingen.

Über die homogene lineare partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial z}{\partial y_\nu} = 0, \tag{1}$$

um die es sich im folgenden handeln soll [1]), gibt es zwar Theorien, die seit langem als klassisch gelten. Aber bei genauerem Zusehen bemerkt man leicht Dinge, die vielfach über einen bloßen Schönheitsfehler hinausgehen. Auf einige solcher Punkte soll im folgenden hingewiesen werden.

Vor allem ist es die Frage nach dem Gültigkeitsgebiet, die zumeist ganz außer acht gelassen wird. Schon an anderer Stelle [2]) hatte ich darauf hingewiesen, daß selbst in dem einfachsten Falle $n = 1$ die Existenz eines Integrals der Gleichung (1) durch die üblichen Beweise nur „im Kleinen" gesichert ist. Allerdings läßt sich hieraus, wie ich a. a. O. zeigen konnte, auch ein Existenzsatz „im Großen" gewinnen. Aber die dazu erforderlichen Überlegungen waren nicht ganz kurz darzustellen und ließen sich auch nicht unmittelbar auf den Fall eines beliebigen n übertragen. Im § 1 der vorliegenden Arbeit wird es gelingen, einen solchen Existenzsatz im Fall $n = 1$ wesentlich einfacher (allerdings auch unter etwas weitergehenden Einschränkungen) zu beweisen. Dieser Beweis läßt sich außerdem auch auf den Fall eines beliebigen n übertragen, wenn man sich mit einem Quader statt eines beliebigen Gebietes als Existenzbereich begnügt (§ 2).

Will man die Gesamtheit aller Integrale der Differentialgleichung (1) finden, so hat man bekanntlich die Gesamtheit aller Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen zu bestimmen, die von einem „Hauptsystem" von Integralen der Gleichung (1) abhängen. Hieraus wird in älteren Darstellungen durchweg geschlossen, daß sich jedes Integral als Funktion eines Hauptsystems darstellen ließe, während die Untersuchungen der Herren *K. Knopp* und *R. Schmidt* [3]), die sich unabhängig von den Differentialgleichungen allgemein mit voneinander abhängigen Funktionen beschäftigen, einen so weitreichenden Schluß nicht gestatten. Es wäre aber denkbar, daß die Integrale der Gleichung (1) vielleicht Funktionen so spezieller Natur sind, daß bei ihnen ein solcher Schluß doch zulässig ist, wenn auch die derzeitigen Beweisverfahren versagen. Im § 3 wird sehr leicht gezeigt werden können, daß die Zulässigkeit oder Unzulässigkeit dieses Schlusses wesentlich durch den Existenzbereich der Differentialgleichung bedingt ist.

Im § 4 endlich werde ich mich mit dem Jacobischen Multiplikator der Gleichung (1) beschäftigen. Zwar wird es gelingen, die bekannte Differentialgleichung, der eine Multiplikatorfunktion genügen muß, für ein allgemeines Gebiet und unter wesentlich

---

[1]) Die Untersuchungen erstrecken sich dabei ausschließlich auf den Bereich der reellen Funktionen.

[2]) Math. Annalen **99** (1928), 602—615.

[3]) Math. Zeitschrift **25** (1926), 373—381. Vgl. auch, insbesondere für weitere Literaturangaben, *G. Doetsch*, Math. Annalen **99** (1928), 590—601.

geringeren Voraussetzungen abzuleiten, als es in den üblichen Darstellungen geschieht. Dagegen ist es nicht gelungen, unter den gleichen weiten Voraussetzungen zu beweisen, daß die erhaltene notwendige Bedingung auch hinreichend ist.

§ 1. Existenzsätze im Falle $n = 1$.

1. Die Funktion $f(x, y)$ sei in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ der x, y-Ebene stetig und mit einer stetigen partiellen Ableitung $f_y(x, y)$ versehen, so daß es also für die Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

durch jeden Punkt ξ, η des Gebiets $\mathfrak{G}$ genau eine in $\mathfrak{G}$ von Rand zu Rand laufende Integralkurve

$$y = \varphi(x, \xi, \eta)$$

gibt. Diese Funktion hat bekanntlich in jedem Punkte, in dem sie überhaupt definiert ist, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung nach ihren drei Variabeln, und es ist

$$\varphi_\xi(x, \xi, \eta) + f(\xi, \eta)\, \varphi_\eta(x, \xi, \eta) = 0$$

und

$$\varphi_\eta(x, \xi, \eta) > 0. \tag{3}$$

Demnach ist

$$\psi(\xi, \eta) = \varphi(x_0, \xi, \eta)$$

bei festem x_0 ein Integral [1]) der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + f(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

und zwar wegen (3) ein Hauptintegral, d. h. ein Integral, das in keinem Teilgebiet seines Existenzbereiches konstant ist. Der Existenzbereich dieses Integrals besteht aus den Punkten ξ, η, für welche die Funktion $\varphi(x_0, \xi, \eta)$ bei festem x_0 existiert, d. h. aus den Punkten, welche auf den durch die Ordinate $x = x_0$ gehenden Integralkurven der zu der partiellen Differentialgleichung (4) gehörenden charakteristischen Differentialgleichung (2) liegen. Oder noch etwas anders formuliert: der Existenzbereich des Integrals besteht aus den Punkten ξ, η von $\mathfrak{G}$, für welche die von ihnen ausgehenden Integralkurven der Gleichung (2) mindestens bis zur Ordinate $x = x_0$ reichen. Daraus folgt nun aber:

Ist $f(x, y)$ in dem Vertikalstreifen $a < x < b$ [2]) stetig und beschränkt und ist $f_y(x, y)$ ebenda vorhanden und stetig, so ist

$$\psi(x, y) = \varphi(x_0, x, y)$$

für ein beliebiges x_0 des Intervalls (a, b) ein in dem ganzen Vertikalstreifen existierendes Integral der partiellen Differentialgleichung (4), *und es ist $\psi_y(x, y) > 0$.*

Denn wegen der Beschränktheit von $f(x, y)$ ist auch die Ableitung $\varphi_x(x, \xi, \eta)$ beschränkt. Die von dem Punkt ξ, η ausgehende Integralkurve bleibt also in einem gewissen Winkelraum, der vom Punkt ξ, η ausgeht und dessen Schenkel die Ordinate $x = x_0$ schneiden. Da andererseits die Kurve in jeder der beiden Richtungen der x-Achse beliebig nahe an den Rand des Vertikalstreifens herankommen muß [3]), so

---

[1]) Dazu gehört, daß $\psi(\xi, \eta)$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat. Vgl. *O. Perron*, Math. Zeitschrift **27** (1928), 549.

[2]) Dabei darf $a = -\infty$, $b = +\infty$ sein.

[3]) Daß die Kurve in einer bestimmten Richtung der x-Achse an den Rand des Streifens herankommt, sagt man auch dann, wenn sie in dieser Richtung der x-Achse beliebig große Abszissen oder beliebig große Ordinaten (absolut genommen) hat.

schneidet die Integralkurve sicher die Ordinate $x = x_0$. Das war aber nur noch zu beweisen.

2. Die eben abgeleitete Tatsache läßt sich folgendermaßen erweitern:

Es sei $\mathfrak{H}$ ein konvexes abgeschlossenes Gebiet[1]) *der x, y-Ebene. In $\mathfrak{H}$ sei $f(x, y)$ stetig und beschränkt und $f_y(x, y)$ ebenda vorhanden und stetig. Dann besitzt die partielle Differentialgleichung* (4) *in $\mathfrak{H}$ ein Integral $\psi(x, y)$, für das $\psi_y(x, y) > 0$ ist.*

Zum Beweise wird der Definitionsbereich von $f(x, y)$ auf einen Vertikalstreifen erweitert. Es sei — falls es einen solchen gibt — x, y irgendein Punkt oberhalb (unterhalb) $\mathfrak{H}$. Dann gibt es senkrecht unter (über) x, y einen höchsten (tiefsten) zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Punkt x, η. Es wird

$$f(x, y) = f(x, \eta) + f_y(x, \eta) \cdot \sin(y - \eta)$$

gesetzt. Damit ist dann $f(x, y)$ in dem abgeschlossenen Vertikalstreifen, der gerade $\mathfrak{H}$ enthält, definiert und ist offensichtlich nach y differenzierbar. Bezeichnet x, η den die Definition von $f(x, y)$ außerhalb $\mathfrak{H}$ vermittelnden Randpunkt von $\mathfrak{H}$, so ist $\eta \to \eta_0$ für $x, y \to x_0, y_0$. Daraus folgt, daß $f(x, y)$ und $f_y(x, y)$ in ihrem jetzigen Definitionsbereich, der mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet werden soll, auch stetig sind. Durch jeden Punkt ξ, η von $\mathfrak{B}$ gibt es daher wieder genau eine in $\mathfrak{B}$ von Rand zu Rand laufende Integralkurve

$$y = \varphi(x, \xi, \eta)$$

der Differentialgleichung (2). Ist x_0 die Abszisse irgend eines Punktes des Vertikalstreifens $\mathfrak{B}$, so ist nach den Ausführungen von Nr. 1

$$\psi(x, y) = \varphi(x_0, x, y)$$

sicher ein Integral von (4) mit den gewünschten Eigenschaften in dem ganzen Streifen, also insbesondere in dem Gebiet $\mathfrak{H}$, wenn sich zeigen läßt, daß die von einem beliebigen Punkt ξ, η des Streifens ausgehende Integralkurve von (2) bis zur Ordinate $x = x_0$ reicht. Das trifft aber in der Tat zu. Denn gibt es in dem durch die Ordinaten $x = x_0$ und $x = \xi$ begrenzten Vertikalstreifen überhaupt einen Punkt oberhalb $\mathfrak{H}$, so ist $\mathfrak{H}$ in diesem abgeschlossenen Vertikalstreifen nach oben beschränkt. Das diesem Streifen angehörende Stück des oberen Randes von $\mathfrak{H}$ ist daher abgeschlossen und beschränkt. Daraus folgt, daß auf diesem Stück des Randes auch $f_y(x, y)$ beschränkt ist. Entsprechend ergibt sich, daß, wenn es in dem durch die Ordinaten $x = x_0$ und $x = \xi$ begrenzten Vertikalstreifen überhaupt einen Punkt unterhalb $\mathfrak{H}$ gibt, $\mathfrak{H}$ in diesem Vertikalstreifen nach unten beschränkt und daher $f_y(x, y)$ auf dem in diesem Streifen liegenden unteren Rand von $\mathfrak{H}$ beschränkt ist. Daher ist in jedem Falle $f(x, y)$ in diesem ganzen Vertikalstreifen beschränkt und, wie in Nr. 1 folgt hieraus, daß die durch den Punkt ξ, η gehende Integralkurve von (2) bis zur Ordinate $x = x_0$ existiert. Das war aber allein noch zu beweisen.

3. Das eben abgeleitete Ergebnis kann zu folgendem verschärft werden:

Unter den Voraussetzungen von Nr. 2 möge die vertikale Strecke[2])

$$\mathfrak{s}: \quad x = x_0, \; y_1 \leqq y \leqq y_2$$

ganz zu $\mathfrak{H}$ gehören und die Funktion $\omega(y)$ für $y_1 \leqq y \leqq y_2$ eine stetige Ableitung $\omega'(y) > 0$ haben. Dann hat die partielle Differentialgleichung (4) *in $\mathfrak{H}$ mindestens ein Integral $\psi(x, y)$, das auf $\mathfrak{s}$ die durch $\omega(y)$ vorgeschriebenen Werte $\psi(x_0, y) = \omega(y)$ annimmt und für das $\psi_y(x, y) > 0$ in $\mathfrak{H}$ ist.*

---

[1]) Es ist nicht notwendig, daß dieses Gebiet beschränkt ist. $\mathfrak{H}$ darf insbesondere die ganze Ebene oder eine abgeschlossene Halbebene oder ein abgeschlossener Parallelstreifen sein.

[2]) Dabei darf auch $y_1 = -\infty$, $y_2 = +\infty$ sein; bei den Ungleichungen ist dann an der entsprechenden Stelle die Gleichheit auszuschließen.

Denn man erweitere wie in Nr. 2 den Definitionsbereich von $f(x, y)$ auf den Vertikalstreifen, der $\mathfrak{H}$ gerade enthält, und außerdem den Definitionsbereich von $\omega(y)$ so auf die ganze y-Gerade, daß $\omega(y)$ für alle y eine stetige positive Ableitung hat; z. B. indem man

$$\omega(y) = \begin{cases} \omega(y_2) + (y - y_2) \cdot \omega'(y_2) & \text{für} \quad y > y_2, \\ \omega(y_1) + (y - y_1) \cdot \omega'(y_1) & \text{für} \quad y < y_1 \end{cases}$$

setzt. Hat $\varphi(x, \xi, \eta)$ die übliche Bedeutung, so ist nun in dem ganzen Vertikalstreifen, also insbesondere in $\mathfrak{H}$ auch

$$\psi(x, y) = \omega(\varphi(x_0, x, y))$$

ein Integral von (4), hat eine positive Ableitung nach y, und es ist

$$\psi(x_0, y) = \omega(\varphi(x_0, x_0, y)) = \omega(y).$$

4. Aus diesen vorbereitenden Bemerkungen folgt nun leicht der angekündigte Satz:

In dem Gebiet $\mathfrak{G}$ seien $f(x, y)$ und $f_y(x, y)$ definiert und stetig. Dann besitzt die partielle Differentialgleichung (4) *in jedem beschränkten und einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{g}$, das total in $\mathfrak{G}$ liegt*[1]*, ein Hauptintegral $\psi(x, y)$, für das sogar ständig $\psi_y(x, y) > 0$ ist.*

Dieser Satz unterscheidet sich von dem an anderer Stelle[2]) bewiesenen nur dadurch, daß hier noch die Beschränktheit von $\mathfrak{g}$ gefordert wird.

Zum Beweise wird $\mathfrak{g}$ in ein einfaches Polygon $\mathfrak{P}$ eingeschlossen, das ebenfalls total in $\mathfrak{G}$ liegt. Die Existenz der Funktion $\psi(x, y)$ wird nun für $\mathfrak{P}$ statt $\mathfrak{g}$ bewiesen; damit ist sie a fortiori für $\mathfrak{g}$ bewiesen.

Durch die sämtlichen Eckpunkte von $\mathfrak{P}$ werden Parallele zur y-Achse gezogen. Dadurch zerfällt $\mathfrak{P}$ in endlich viele abgeschlossene Trapeze (bzw. Dreiecke), also konvexe Figuren, die total in $\mathfrak{G}$ liegen, und auf die daher Nr. 3 anwendbar ist.

Wir numerieren diese Teilfiguren $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_n$ so, daß jede mit der Summe der ihr vorhergehenden eine Strecke gemeinsam hat, und setzen

$$\mathfrak{T}_\nu = \mathfrak{t}_1 + \cdots + \mathfrak{t}_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Es sei $\mathfrak{s}$ eine schon möglichst groß gewählte Strecke, die zugleich in $\mathfrak{T}_\nu$ wie in $\mathfrak{t}_{\nu+1}$ enthalten ist. Dann läßt sich zeigen, daß $\mathfrak{T}_\nu$ und $\mathfrak{t}_{\nu+1}$ keinen weiteren Punkt gemeinsam haben. Denn jeder gemeinsame Punkt der beiden Gebiete läßt sich sowohl in $\mathfrak{T}_\nu$ wie in $\mathfrak{t}_{\nu+1}$ vom Innern her erreichen. Sind S und T zwei solche gemeinsamen Punkte, so kann man sie daher sowohl durch einen mit Ausnahme der Endpunkte im *Innern* von $\mathfrak{T}_\nu$ verlaufenden einfachen Polygonzug als auch durch einen solchen Polygonzug in $\mathfrak{t}_{\nu+1}$ verbinden; beide Polygonzüge zusammen ergeben ein einfaches Polygon $\mathfrak{Q}$, das ev. bis auf die beiden Punkte S und T im Innern von $\mathfrak{P}$ verläuft. Wir wollen nun für S einen inneren Punkt der Strecke $\mathfrak{s}$ nehmen. Hätten entgegen unserer Behauptung $\mathfrak{T}_\nu$ und $\mathfrak{t}_{\nu+1}$ noch einen nicht auf $\mathfrak{s}$ gelegenen Punkt T gemeinsam, so würde die Strecke $\mathfrak{s}$ das für diese Punkte S und T konstruierte Polygon $\mathfrak{Q}$, da es nach seiner Konstruktion abgesehen von den Punkten S und T im Innern von $\mathfrak{T}_\nu$ bzw. $\mathfrak{t}_{\nu+1}$ verläuft, nur in S schneiden. Daher läge einer der Endpunkte von $\mathfrak{s}$ — er heiße S_0 — im Innern von $\mathfrak{Q}$. Da in jeder Umgebung jedes Endpunktes von $\mathfrak{s}$ Punkte liegen, die nicht zu $\mathfrak{P}$ gehören, würden also in der Nähe von S_0 und damit innerhalb von $\mathfrak{Q}$ Punkte liegen, die nicht zum Innern von $\mathfrak{P}$ gehören. Das ist aber unmöglich.

---

[1]) Von einer Punktmenge $\mathfrak{M}_1$ wird gesagt, sie liege total in einer Punktmenge $\mathfrak{M}_2$, wenn $\mathfrak{M}_1$ in $\mathfrak{M}_2$ enthalten ist, aber beide Mengen keinen gemeinsamen Randpunkt haben.

[2]) Math. Annalen **99** (1928), 602–615.

Nun kann der Beweis unseres Satzes durch Schluß von ν auf $\nu+1$ sofort beendet werden. Denn wir wählen auf Grund von Nr. 2 in $\mathfrak{T}_1$ irgendein Integral $\psi(x, y)$ von (4) mit $\psi_y(x, y) > 0$ und nehmen an, das sei auch für das Gebiet $\mathfrak{T}_\nu$ möglich. Dann kann gemäß Nr. 3 in dem Gebiet $t_{\nu+1}$ ein Integral $\psi(x, y)$ so gewählt werden, daß es auf der Strecke $\mathfrak{s}$, die $\mathfrak{T}_\nu$ mit $t_{\nu+1}$ gemeinsam hat, mit den Werten übereinstimmt, die das für $\mathfrak{T}_\nu$ gewählte $\psi(x, y)$ auf dieser Strecke annimmt, und daß zugleich in $t_{\nu+1}$ auch $\psi_y(x, y) > 0$ ist; letzteres, weil ja in ganz $\mathfrak{T}_\nu$, also auch auf $\mathfrak{s}$ die Ungleichung $\psi_y(x, y) > 0$ nach unserer Annahme erfüllt ist. Da $\mathfrak{T}_\nu$ und $t_{\nu+1}$ außer der Strecke $\mathfrak{s}$ keinen Punkt gemeinsam haben, ist damit $\psi(x, y)$ nun auch in $\mathfrak{T}_{\nu+1}$ eindeutig definiert, und daraus folgt unmittelbar, daß $\psi(x, y)$ auch in $\mathfrak{T}_{\nu+1}$ ein Integral von (4) mit $\psi_y(x, y) > 0$ ist. Damit ist die Behauptung, wie angekündigt, für $\mathfrak{T}_n = \mathfrak{P}$ bewiesen.

§ 2. Existenzsätze im Fall eines beliebigen n.

1. Über die allgemeine Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial z}{\partial y_\nu} = 0 \tag{1}$$

liefert ein bekannter Satz von Herrn *E. Lindelöf* [1]) das folgende Ergebnis:

Sind die Funktionen

$$f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

in dem Streifen $a < x < b$ [2]) *des* $(n+1)$*-dimensionalen* $x, y_1, \ldots, y_n$*-Raumes stetig und beschränkt und mit stetigen Ableitungen erster Ordnung nach den* y_ν *versehen, so reichen für ein beliebiges* x_0 *des Intervalls* (a, b) *die durch einen beliebigen Punkt* $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ *des Streifens gehenden Integralkurven*

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) \end{cases} \tag{5}$$

des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

bis zur Ebene $x = x_0$. *Die Funktionen*

$$\psi_\nu(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) = \varphi_\nu(x_0, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$$

existieren also für alle Punkte $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ *des Streifens, und sie bilden für diesen Streifen ein System von n Integralen der Gleichung* (1), *für das überdies in dem ganzen Streifen die Jacobische Determinante*

$$\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} > 0 \tag{6}$$

ist.

Nach dem erwähnten Satz von Lindelöf haben nämlich die Funktionen ψ_ν die behaupteten Eigenschaften überall dort, wo sie überhaupt existieren. Der Existenzbereich dieser Funktionen besteht aber aus den Punkten $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ des Streifens, für welche die von ihnen ausgehenden Integralkurven (5) bis zur Ebene $x = x_0$ reichen. Da die Funktionen f_ν und daher auch die Ableitungen $\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x}$ beschränkt sind, ergibt sich wie in Nr. 1 des § 1, daß jede Integralkurve bis zu jener Ebene reicht, also die Funktionen $\psi_\nu(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ in dem ganzen Streifen existieren.

[1]) Journal de Math. (5) **10** (1900), 423 ff.

[2]) Dabei darf $a = -\infty$, $b = +\infty$ sein.

2. Will man nun nach dem Muster des § 1 einen Existenzsatz für ein allgemeineres Gebiet durch Zurückführung auf den Existenzsatz von Nr. 1 ableiten, so kommt es wieder darauf an, den Existenzbereich von Funktionen auf einen ganzen Streifen unter Erhaltung gewisser Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften zu erweitern. Dem dient der folgende Hilfssatz, bei dem allerdings als Ausgangsgebiet nicht wie im § 1 ein beliebiges konvexes Gebiet, sondern nur ein Quader genommen werden kann.

In dem abgeschlossenen achsenparallelen Quader [1])

$$\mathfrak{Q}_{n+1}\colon a \leqq x \leqq b, \quad c_1 \leqq y_1 \leqq d_1, \ldots, c_n \leqq y_n \leqq d_n$$

sei die Funktion $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ *stetig und beschränkt und mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung nach den* y_ν *versehen. Dann läßt sich der Definitionsbereich der Funktion* f *so auf den Streifen*

$$a \leqq x \leqq b, \quad y_1, \ldots, y_n \text{ beliebig}$$

des $x, y_1, \ldots, y_n$*-Raumes ausdehnen, daß die erweiterte Funktion in diesem Streifen ebenfalls die angeführten Eigenschaften hat.*

In § 1 konnte die Erweiterung der Funktion einfach in der Weise vorgenommen werden, daß man die sie repräsentierende Fläche durch Tangenten der Fläche fortsetzte und diese Tangenten dann noch zu Schlangenlinien verbog, um die Beschränktheit der Funktion zu wahren, was übrigens nicht einmal unbedingt nötig ist. In dem jetzigen allgemeineren Fall ist dieses Verfahren nicht brauchbar. Wir werden zur Fortsetzung ein Verfahren benutzen, das bei geradlinigem und „horizontalem" Rande der Fläche darauf hinausläuft, daß man die Fläche um eine der Kanten umklappt und dann noch zu einer unbegrenzten Fläche auseinander zerrt. Im einzelnen gehen wir so vor:

Es bezeichne $\mathfrak{Q}_m$ den m-dimensionalen Quader [1])

$$\mathfrak{Q}_m\colon a \leqq x \leqq b, \quad c_1 \leqq y_1 \leqq d_1, \ldots, c_m \leqq y_m \leqq d_m.$$

Wir erweitern den Definitionsbereich der Funktion f zunächst auf den Bereich

(7) $\qquad x, y_1, \ldots, y_{n-1}$ in $\mathfrak{Q}_{n-1}$, y_n beliebig.

Wir wählen nämlich, wenn etwa d_n endlich ist, eine Zahl δ so, daß

$$c_n < \delta < d_n$$

ist, und setzen für $y_n \geqq d_n$

$$f(x, y_1, \ldots, y_n) = 2f(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, d_n) - f(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, \delta + (d_n - \delta)\, e^{-\frac{y_n - d_n}{d_n - \delta}}).$$

Da

$$\delta + (d_n - \delta)\, e^{-\frac{y_n - d_n}{d_n - \delta}}$$

eine monotone Funktion ist, für $y_n = d_n$ den Wert d_n hat und für $y_n \to +\infty$ gegen δ strebt, ist die rechte Seite jedenfalls definiert und liefert für $y_n = d_n$ den Wert $f(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, d_n)$. Daher ist nunmehr f im Bereich

(8) $\qquad x, y_1, \ldots, y_{n-1}$ in $\mathfrak{Q}_{n-1}$, $y_n \geqq c_n$

als eindeutige Funktion definiert und ist, da sie in dem ursprünglichen wie in dem hinzugekommenen Bereich stetig und beschränkt ist, dieses nun auch in dem Bereich (8). Die Funktion f hat daher in (8) auch stetige partielle Ableitungen nach $y_1, \ldots, y_n$, wenn die vordere und hintere Ableitung nach y_n auf der Ebene $y_n = d_n$ übereinstimmen, was offenbar der Fall ist.

---

[1]) Dieser Quader braucht nicht beschränkt zu sein; d. h. es können a und die c_ν gleich $-\infty$ und b und die d_ν gleich $+\infty$ sein. An den entsprechenden Stellen der Ungleichungen ist dann die Gleichheit auszuschließen.

Entsprechend kann man nun auch in dem Fall, daß c_n endlich ist, den Definitionsbereich (8) zu dem Bereich (7) erweitern.

Wendet man weiter dieses Verfahren auf die Variable y_{n-1} statt y_n an, so kommt man von dem Bereich (7) zu dem Bereich

$$x, y_1, \ldots, y_{n-2} \text{ in } \mathfrak{Q}_{n-2},\ y_{n-1},\ y_n \text{ beliebig}$$

und so nach weiteren $n-2$ Schritten zu dem vollständigen Beweis des Satzes.

3. Aus den beiden vorhergehenden Nummern ergibt sich nun der folgende Existenzsatz:

Sind die Funktionen

$$f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

in einem abgeschlossenen achsenparallelen Quader des $x, y_1, \ldots, y_n$-Raumes stetig und beschränkt und mit stetigen Ableitungen nach den y_ν versehen, so gibt es zu der partiellen Differentialgleichung (1) *in diesem Quader ein System von n Integralen*

$$\psi_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n),$$

für welches die Jacobische Determinante

$$\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} > 0 \tag{6}$$

ist.

Denn man erweitere den Definitionsbereich sämtlicher f_ν, wie in Nr. 2 angegeben. Dann ergeben die Überlegungen von Nr. 1 die Existenz eines Integralsystems mit den genannten Eigenschaften in einem ganzen Streifen $a \leqq x \leqq b$, der den Quader enthält, also erst recht in dem Quader.

§ 3. Über die Darstellung der Gesamtheit aller Integrale durch ein Hauptsystem.

1. Unter einem *Hauptsystem* von Integralen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial z}{\partial y_\nu} = 0 \tag{1}$$

in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ wird ein System von n Integralen

$$\psi_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

mit der Eigenschaft verstanden, daß in jedem Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ die Jacobische Determinante

$$\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \not\equiv 0$$

ist.

Es läßt sich leicht zeigen, daß unter der Voraussetzung, daß die Funktionen $f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)$ in $\mathfrak{G}$ stetig sind, die Gesamtheit der Integrale von (1) gerade aus der Gesamtheit der Funktionen $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ besteht, die in $\mathfrak{G}$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben und von dem Hauptsystem abhängig sind [1]). Dabei heißen $n+1$ Funktionen

$$\psi(x, y_1, \ldots, y_n),\ \psi_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

in $\mathfrak{G}$ voneinander abhängig [2]), wenn es für jedes beschränkte abgeschlossene Teilgebiet $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$ eine Funktion $F(u, u_1, \ldots, u_n)$ gibt, so daß F in dem ganzen $u, u_1, \ldots, u_n$-Raum definiert und stetig ist, in keinem Teilgebiet dieses Raumes identisch verschwindet und in $\mathfrak{B}$

---

[1]) Für den Fall $n = 1$ ist der Beweis ausführlich in der in Fußnote 2, S. 185 zitierten Arbeit dargestellt.

[2]) Vgl. *K. Knopp* und *R. Schmidt*, Math. Zeitschrift **25** (1926), 373— 381.

(13) $$\Phi(x, y_1, \ldots, y_n) = F(\psi(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n)) \equiv 0$$

ist. Wir fragen uns, ob für die Integrale der partiellen Differentialgleichung die Gleichung (13) vielleicht stets nach der Funktion $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ aufgelöst werden kann, d. h. ob sich nicht etwa jedes Integral $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$ der Differentialgleichung (1) als Funktion eines passend gewählten Hauptsystems darstellen läßt.

2. Für die Beantwortung dieser Frage wird der Begriff eines *charakteristischen Feldes* der Differentialgleichung eingeführt. Wie üblich, nehmen wir an, daß die Koeffizienten f_ν der Differentialgleichung (1) im Gebiet $\mathfrak{G}$ stetig sind und stetige partielle Ableitungen nach den y_ν haben, so daß es durch jeden Punkt $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ von $\mathfrak{G}$ genau eine Integralkurve

(5) $$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) \end{cases}$$

des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

gibt. Diese Integralkurven heißen auch *Charakteristiken* der Gleichung (1). Ist nun $\mathfrak{e}$ ein offenes und zusammenhängendes Stück der Ebene $x = x_0$, das ganz in $\mathfrak{G}$ liegt, so wird unter dem durch $\mathfrak{e}$ bestimmten charakteristischen Feld $\mathfrak{g}(\mathfrak{e})$ der Differentialgleichung (1) die Gesamtheit der Punkte verstanden, die auf den durch Punkte von $\mathfrak{e}$ gehenden Charakteristiken liegen. Man sieht übrigens leicht ein, daß $\mathfrak{g}(\mathfrak{e})$ stets ein Gebiet ist. Es besteht nun die folgende Tatsache:

In dem Gebiet $\mathfrak{G}$ des $x, y_1 \ldots, y_n$-Raumes seien die Funktionen

$$f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

stetig und mit stetigen partiellen Ableitungen nach den y_ν versehen. Es sei $\mathfrak{g}(\mathfrak{e})$ ein charakteristisches Feld der Differentialgleichung (1), *und das Ebenenstück $\mathfrak{e}$ habe die Abszisse x_0. Dann bilden die charakteristischen Funktionen* (5) *für $x = x_0$ in $\mathfrak{g}(\mathfrak{e})$ ein Hauptsystem von Integralen der Gleichung* (1) *mit der Eigenschaft, daß die Gesamtheit der Integrale von* (1) *gerade aus der Gesamtheit der Funktionen*

$$\psi(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) = \omega(\varphi_1(x_0\, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n), \ldots, \varphi_n(x_0, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)),$$

besteht, wobei $\omega(y_1, \ldots, y_n)$ eine beliebige Funktion bedeutet, die für die Punkte $y_1, \ldots, y_n$ von $\mathfrak{e}$ stetige partielle Ableitungen hat.

Denn ist ω eine derartige Funktion, so ist $\psi(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ in dem ganzen charakteristischen Feld definiert, da ja jedes $\varphi_\nu(x_0, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ für alle Punkte $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ derselben Charakteristik seinen Wert nicht ändert, also die in ω eingesetzten Argumente φ_ν gerade die Ordinaten des Schnittpunktes der Charakteristik mit der Ebene $\mathfrak{e}$ sind. Daß ψ auch ein Integral ist, ist nun klar.

Ist umgekehrt $\psi(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ in $\mathfrak{g}(\mathfrak{e})$ ein Integral von (1), so braucht man nur

$$\omega(y_1, \ldots, y_n) = \psi(x_0, y_1, \ldots, y_n)$$

zu setzen. Denn [1]) da jedes Integral für die Punkte derselben Charakteristik konstant ist und da

$$x_0, \varphi_1(x_0, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n), \ldots, \varphi_n(x_0, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$$

und

$$\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$$

---

[1]) Vgl. z. B. *Serret-Scheffers*, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, Bd. **3** (6. Aufl., 1924), S. 275.

der gleichen Charakteristik angehören, ist in der Tat

$$\psi(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) = \psi(x_0, \varphi_1(x_0, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n), \ldots, \varphi_n(x_0, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)).$$

Ist $\mathfrak{G}$ der Streifen $a < x < b$ des $x, y_1, \ldots, y_n$-Raumes und sind die f_ν darin überdies beschränkt, so gilt der Satz mit einem beliebigen x_0 des Intervalls (a, b) für den ganzen Streifen $a < x < b$ statt $\mathfrak{g}$.

Denn in diesem Fall ist nach § 2, Nr. 1 das Feld $\mathfrak{g}(\mathfrak{e})$ gerade der Streifen $a < x < b$.

3. Man kann weiter fragen, ob das Resultat von Nr. 2 nicht dahin verallgemeinert werden kann, daß in dem ganzen Ausgangsgebiet $\mathfrak{G}$ sich jedes Integral als Funktion eines gewissen festen Systems von Integralen darstellen läßt. Es zeigt sich aber schon für $n = 1$, daß das nicht immer möglich ist, selbst wenn $\mathfrak{G}$ eine Halbebene oder ein Rechteck ist.

Wir weisen das an der Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{14}$$

nach, wobei $\mathfrak{G}$ die Halbebene $y > 0$ sei. Wir nehmen an, es gäbe doch ein Integral $\psi_0(x, y)$ dieser Differentialgleichung, so daß in der Halbebene $y > 0$ jedes Integral von (14) sich als Funktion von $\psi_0(x, y)$ darstellen ließe.

Dann müßte $\psi_0(x, y)$ bei festem x eine eigentlich monotone Funktion von y sein. Denn hätte $\psi_0(x, y)$ an den Stellen x_0, y_1 und x_0, y_2 denselben Wert, so träfe das für jedes Integral von (14) zu, da wir ja annehmen, daß sich jedes Integral von (14) als Funktion von ψ_0 darstellen läßt. Insbesondere müßte das also auch für das Integral

$$\psi = 2y - x^2 \tag{15}$$

zutreffen, was aber nicht der Fall ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß $\psi_0(x, y)$ für ein gewisses x_0 mit wachsendem y monoton *zu*nimmt. Die Charakteristiken von (14) sind die Parabeln, die durch Parallelverschiebung von $2y = x^2$ längs der y-Achse entstehen, oder Teile von solchen, nämlich diejenigen Teile, die oberhalb der x-Achse liegen. Da es sicher zwei Parabeln gibt, die jede Ordinate in der oberen Halbebene schneiden, und da $\psi_0(x, y)$ als Integral seinen Wert auf einer Charakteristik nicht ändert, gibt es also auf jeder Ordinate $x = \bar{x}$ zwei Punkte $y_1 < y_2$, so daß

$$\psi_0(\bar{x}, y_1) < \psi_0(\bar{x}, y_2)$$

ist. Daher ist $\psi_0(x, y)$ auf *jeder* Ordinate eine eigentlich monoton wachsende Funktion von y.

Nehmen wir beiderseits der y-Achse je eine Ordinate, so nimmt demnach auf jeder von ihnen $\psi_0(x, y)$ unterhalb der Parabel $2y = x^2$ noch weiter ab. Wegen der Stetigkeit von ψ_0 gibt es daher auf den beiden Ordinaten unterhalb $2y = x^2$, aber noch in der oberen Halbebene zwei Punkte, in denen ψ_0 denselben Wert erhält. Die durch diese beiden Punkte gehenden Parabelbögen verfolgen wir bis zu ihrer Einmündung in die x-Achse in den Punkten $P(-a, 0)$ und $Q(b, 0)$. Da ψ_0 auf den beiden in P und Q einmündenden Parabelbögen denselben Wert hat, müßte das für jedes Integral zutreffen, wenn sich jedes Integral als Funktion von ψ_0 darstellen ließe. Es sind nun zwei Fälle möglich:

α) $a \neq b$. Dann führt schon das Integral (15) einen Widerspruch herbei, da dieses Integral gleiche Werte nur auf den zur gleichen Parabel gehörigen Parabelbögen annimmt.

β) $a = b$. Für diesen Fall ziehen wir die Hilfsgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{16}$$

heran, wo

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{für } y > 0, \\ x - y^2 & \text{für } y \leqq 0 \end{cases}$$

sein soll. Diese Funktion hat überall stetige Ableitungen, und die Charakteristiken von (16) stimmen für $y > 0$ mit den Charakteristiken von (14) überein. Wir betrachten nun auch die Differentialgleichung (14) vorübergehend in der ganzen x, y-Ebene. Da stets $f(x, y) \leqq x$ ist, gilt für je zwei Charakteristiken von (14) und (16), die einen Punkt R gemeinsam haben, daß die zu (14) gehörige Charakteristik rechts von R nicht unterhalb der Charakteristik von (16) liegt. Ist $y = \varphi(x)$ die Parabel durch $(-a, 0)$ und $y = \overline{\varphi}(x)$ die durch denselben Punkt gehende Charakteristik von (16), so ist also

$$\overline{\varphi}(x) \leqq \varphi(x) \text{ für } x \geqq -a.$$

Da aber in der unteren Halbebene

$$\overline{\varphi}'(x) = x - \overline{\varphi}^2 < x = \varphi'(x)$$

ist, kommt einmal $\overline{\varphi}$ unterhalb φ zu liegen und schneidet daher in der unteren Halbebene eine unterhalb φ gelegene Parabel $\varphi_1(x)$, etwa im Punkte $x = c$, wobei übrigens φ_1 noch so gewählt werden kann, daß $c < b$ ist. Dann ist

$$\overline{\varphi}(x) \leqq \varphi_1(x) < \varphi(x) \text{ für } x \geqq c.$$

Es schneidet also $y = \overline{\varphi}(x)$ die x-Achse in einem rechts von Q gelegenen Punkt. Ist nun $\overline{\varphi}(x, \xi, \eta)$ die zu (16) gehörige charakteristische Funktion, so ist $\overline{\varphi}(0, x, y)$ in der ganzen Ebene ein Integral von (16) und hat auf der ganzen Kurve $y = \overline{\varphi}(x)$ denselben Wert, also, da $\overline{\varphi}_y(0, x, y) > 0$ ist, auf den beiden in P und Q einmündenden Parabelbögen sicher nicht denselben Wert. Wir haben also in $\overline{\varphi}(0, x, y)$ eine Funktion, die in der oberen Halbebene ein Integral von (14), aber keine Funktion von ψ_0 ist. Damit ist aber unser Ziel erreicht.

4. An unser Beispiel wollen wir noch die folgende Bemerkung anknüpfen, und dabei uns der größeren Anschaulichkeit halber auf $n = 1$ beschränken. Es sei die Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

in einem Gebiet $\mathfrak{G}_1$ gegeben; wir wollen dann von dem Problem I sprechen und mit ψ_1 ein Integral dieser Gleichung im Gebiet $\mathfrak{G}_1$ bezeichnen. Wir betrachten außerdem dieselbe Gleichung in einem Teilgebiet $\mathfrak{G}_2$ von $\mathfrak{G}_1$; wir sprechen dann von dem Problem II und bezeichnen mit ψ_2 ein Integral dieses Problems. Es ist klar, daß das über $\mathfrak{G}_2$ liegende Stück der Integralfläche $z = \psi_1(x, y)$ zugleich eine Integralfläche des Problems II ist. Aber umgekehrt braucht eine Integralfläche $z = \psi_2(x, y)$ nicht ein Stück einer Integralfläche des Problems I zu sein. Denn betrachten wir die Differentialgleichung (14) in der ganzen Ebene, so sind ihre Charakteristiken die Parabeln $2y = x^2$, und jede Integralfläche hat diese zu Isohypsen. Nehmen wir aber dieselbe Differentialgleichung nur in dem Bereich $y > 0$, so gibt es nun auch Integralflächen, welche diese Linien nicht zu Isohypsen haben; das war ja gerade vorhin gezeigt. Diese Integralflächen sind dann nicht Teile der für die ganze Ebene definierten Integralflächen.

Die partiellen Differentialgleichungen verhalten sich also in dieser Hinsicht ganz anders als gewöhnliche Differentialgleichungen. Ist eine gewöhnliche Differentialgleichung mit stetiger rechter Seite in einem gewissen Gebiet $\mathfrak{G}$ gegeben, so weiß man, daß eine Kurve, die der Differentialgleichung für ein Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ genügt, immer ein Stück einer Integralkurve des ursprünglichen Problems ist, während bei den partiellen Differentialgleichungen das Entsprechende für die Integralflächen nicht der Fall zu sein

braucht. Man muß also vorsichtig sein, wenn man partielle Differentialgleichungen statt in dem ganzen gegebenen Bereich nur in einer kleinen Umgebung eines Punktes betrachtet; es kann vorkommen, daß die für diese Umgebung erhaltenen Integralflächen gar nicht Teile von Integralflächen des gegebenen Problems sind.

§ 4. Über den Jacobischen Multiplikator.

1. Es sei wieder die Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial z}{\partial y_\nu} = 0 \tag{1}$$

in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ des $x, y_1, \ldots, y_n$-Raumes gegeben. Unter einem Multiplikator von (1) im Gebiet $\mathfrak{G}$ wird eine Funktion

$$M = M(x, y_1, \ldots, y_n)$$

verstanden, die in $\mathfrak{G}$ stetig und $\neq 0$ ist und zu der es in $\mathfrak{G}$ ein System von Funktionen

$$\psi_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n) \tag{17}$$

mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung gibt, so daß

$$M\left\{\frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial z}{\partial y}\right\} \equiv \frac{\partial(z, \psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(x, y_1, \ldots, y_n)}$$

ist. Wegen $M \neq 0$ ist dann auch

$$\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \neq 0;$$

Die Funktionen (17) bilden daher in $\mathfrak{G}$ ein Hauptsystem von Integralen der Gleichung (1).

Die Existenz eines Multiplikators ergibt sich für einen achsenparallelen Quader unmittelbar aus dem Existenzsatz von Nr. 3 in § 2 unter den dort angeführten Bedingungen. Dieser Existenzbeweis setzt aber schon die Kenntnis eines Hauptsystems von Integralen voraus. Soll der Multiplikator für die Auflösung der Differentialgleichung etwas nützen, so muß man dagegen eine Möglichkeit haben, ihn unabhängig von der Kenntnis der Integrale zu finden.

2. Als notwendige Bedingung dafür, daß eine Funktion M ein Multiplikator ist, ergibt sich folgendes:

In dem Gebiet $\mathfrak{G}$ des $x, y_1, \ldots, y_n$-Raumes seien die Funktionen

$$f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

stetig und mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung nach den y_n versehen. Ist $M(x, y_1, \ldots, y_n)$ in $\mathfrak{G}$ ein Multiplikator der Gleichung (1), *der in $\mathfrak{G}$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat, so ist in $\mathfrak{G}$*

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial(M f_\nu)}{\partial y_\nu} = 0. \tag{18}$$

Die üblichen Beweise für die Notwendigkeit der Bedingung (18) setzen, ohne daß dies besonders betont wird, voraus[1]), daß die zu M gehörigen Funktionen ψ_ν sogar stetige partielle Ableitungen *zweiter* Ordnung haben. Dadurch ist es zwar möglich, zu einem einfachen Beweis zu gelangen, aber das Ergebnis ist unbefriedigend.

Wir werden nun die Gültigkeit von (18) für einen beliebigen Punkt $\xi_0, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0}$ des Gebiets $\mathfrak{G}$ beweisen; dieser Punkt bleibt für die weiteren Ausführungen fest.

Nach der Definition des Multiplikators gibt es n Funktionen

$$\psi_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n),$$

[1]) Vgl. z. B. *Serret-Scheffers*, a. a. O., S. 558; oder *De la Vallée Poussin*, Cours d'analyse infinitésimale, Bd. 2 (5. Aufl., 1925), S. 283.

die in $\mathfrak{G}$ stetige partielle Ableitungen haben, so daß in $\mathfrak{G}$

$$M\left\{\frac{\partial z}{\partial y}+\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu \frac{\partial z}{\partial y_\nu}\right\}=\frac{\partial(z, \psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(x, y_1, \ldots, y_n)} \tag{19}$$

ist. Wegen $M \neq 0$ sind diese Funktionen auch Integrale der Gleichung (1). Die durch den Punkt $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ von $\mathfrak{G}$ gehende Charakteristik dieser Gleichung sei

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n), \end{aligned}$$

und diese sei etwa für das den Wert ξ als inneren Punkt enthaltende Intervall $a \leqq x \leqq b$ definiert. Dann ist, wie übrigens auch schon in Nr. 2 des § 3 benutzt,

$$\psi_\nu(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n), \ldots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)) = \psi_\nu(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) \tag{20}$$

für $\nu = 1, \ldots, n$ und $a \leqq x \leqq b$. Ist nun insbesondere $a \leqq x \leqq b$ ein zu dem Punkt $\xi_0, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0}$ gehöriges Intervall, so existieren die Funktionen $\varphi_\nu(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ in diesem ganzen Intervall auch für alle hinreichend nahe an $\xi_0, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0}$ gelegenen $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$. Die Identität (20) besteht also, wenn δ hinreichend klein ist, für alle

$$a < x < b, |\xi - \xi_0| < \delta, |\eta_1 - \eta_{10}| < \delta, \ldots, |\eta_n - \eta_{n0}| < \delta. \tag{21}$$

Da die vorkommenden Funktionen stetige partielle Ableitungen haben, folgt daher aus der Identität (20) mit Hilfe des Multiplikationssatzes für Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)} \cdot \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\eta_1, \ldots, \eta_n)} = \frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(\eta_1, \ldots, \eta_n)}.$$

Wegen (19) kann dies auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$M(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) \cdot \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\eta_1, \ldots, \eta_n)} = M(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n). \tag{22}$$

Diese Identität gilt für den ganzen Bereich (21), insbesondere also im Punkte $\xi_0, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0}$ und für $a < x < b$. Die in (22) noch vorkommende Funktionaldeterminante läßt sich aber mit Hilfe der f_ν als Exponentialfunktion schreiben [1]). Man erhält dann aus (22)

$$M(x, \varphi_1(x, \xi_0, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0}), \ldots, \varphi_n(x, \xi_0, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0})) = M(\xi_0, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0}) \cdot e^{-\int_{\xi_0}^{x} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\nu(x, \varphi_1(x, \xi_0, \eta_{10}, \cdots, \eta_{n0}), \cdots, \varphi_n(x, \xi_0, \eta_{10}, \cdots, \eta_{n0}))}{\partial \varphi_\nu} dx}.$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach x für die Stelle $x = \xi_0$

$$\begin{aligned} M_x(\xi_0, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0}) + \sum_{\nu=1}^{n} M_{y_\nu}(\xi_0, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0}) \cdot \varphi'_\nu(\xi_0) \\ = - M(\xi_0, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0}) \sum_{\nu=1}^{n} f'_{\nu(y_\nu)}(\xi_0, \eta_{10}, \ldots, \eta_{n0}); \end{aligned}$$

dabei soll $f'_{\nu(y_\nu)}$ die Ableitung von f_ν nach y_ν bezeichnen. Da die $\varphi_\nu(x)$ aber Integrale des zur partiellen Gleichung (1) gehörenden charakteristischen Gleichungssystems sind, kann diese Gleichung auch in der Gestalt

$$\frac{\partial M}{\partial x}+\sum_{\nu=1}^{n}\left(f_\nu \frac{\partial M}{\partial y_\nu}+M \frac{\partial f_\nu}{\partial y_\nu}\right)=0$$

geschrieben werden, womit die Behauptung bewiesen ist.

3. Von besonderer Wichtigkeit ist es, zu wissen, wie weit die eben abgeleitete notwendige Bedingung sich als hinreichend erweist. Gewöhnlich wird so getan, als ob die notwendige Bedingung zugleich hinreichend sei. Die in der Literatur vorkommenden Beweise lassen aber einen solchen Schluß nicht zu. Man erhält vielmehr nur gewisse Teilergebnisse. So z. B. das folgende:

[1]) Vgl. z. B. *De la Vallée Poussin*, a. a. O., S. 146.

In dem Gebiet $\mathfrak{G}$ *des* $x, y_1, \ldots, y_n$*-Raumes seien die Funktionen*

$$f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

stetig und mit stetigen partiellen Ableitungen nach den y_ν *versehen. Es sei* $\mathfrak{g}(e)$ *ein charakteristisches Feld der Differentialgleichung* (1). *Endlich sei in* $\mathfrak{g}$

$$\sum_{\nu=1}^{n} f'_{\nu(y_\nu)}(x, y_1, \ldots, y_n) = 0.$$

Dann hat die Differentialgleichung (1) *in* $\mathfrak{g}$ *den Multiplikator* 1.

Denn ist das charakteristische Feld durch die Ebene $x = x_0$ bestimmt und ist

$$\varphi_1(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n), \ldots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$$

das zur Gleichung (1) gehörige charakteristische Funktionensystem, so bildet dieses für $x = x_0$ ein System von Integralen der Gleichung (1), und die Funktionaldeterminante dieses Systems ist

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\eta_1, \ldots, \eta_n)} = e^{\int_{\xi}^{x_0} f'_{\nu(y_\nu)}(x_1 \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\, dx} = e^0 = 1.$$

Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)} = 0$$

hat also dieselben Integrale wie die Gleichung (1), und der Koeffizient von $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ bzw. $\frac{\partial z}{\partial x}$ ist in beiden Gleichungen gleich 1. Daraus folgt aber

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) \frac{\partial z}{\partial \eta_\nu} = \frac{\partial(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)}.$$

Aus der eben bewiesenen Tatsache folgt unmittelbar:

Ist das Gebiet $\mathfrak{G}$ *der ganze* $x, y_1, \ldots, y_n$*-Raum und sind die Funktionen darin überdies beschränkt, so hat die Gleichung* (1) *den Multiplikator* 1 *in dem ganzen* $x, y_1, \ldots, y_n$*-Raum.*

Hiermit ist ein Ergebnis gewonnen, das unabhängig von der Kenntnis eines charakteristischen Feldes ist. Das ist für die praktische Anwendung wichtig, da ja das Aufsuchen eines charakteristischen Feldes im allgemeinen sich von der Lösung der partiellen Differentialgleichung nicht sehr wesentlich unterscheidet.

Für ein beliebiges M läßt sich aus dem üblichen Beweisverfahren [1]) noch folgendes Resultat herauspräparieren:

Sind die Funktionen

$$f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

in dem ganzen $x, y_1, \ldots, y_n$*-Raum beschränkt, stetig und mit stetigen Ableitungen zweiter Ordnung nach den* y_ν *versehen, so ist jede stetige Funktion* $M(x, y_1, \ldots, y_n)$*, die im ganzen Raum stetige partielle Ableitungen nach ihren Variabeln hat,* $\neq 0$ *ist und die Differentialgleichung*

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial(M f_\nu)}{\partial y_\nu} = 0$$

erfüllt, ein Multiplikator der Gleichung (1).

[1]) Vgl. z. B. *Serret-Scheffers*, a. a. O., S. 558 ff.

Tübingen, 31. 12. 1928.

Eingegangen 1. Januar 1929.

Über die Verallgemeinerung eines Kroneckerschen Determinantensatzes.

Von *G. Rados* in Budapest.

Bereits im Jahre 1884 veröffentlichte ich im ungarischen mathematischen und naturwissenschaftlichen Anzeiger der ungarischen Akademie der Wissenschaften eine Note unter dem Titel „Zur Theorie der Determinanten", in welcher unabhängig von Kronecker der nachfolgende Satz bewiesen wurde:

Bildet man aus den Elementen der Determinanten

$$A = |a_{gh}| \quad (g, h = 1, 2, \ldots, n)$$
$$B = |b_{rs}| \quad (r, s = 1, 2, \ldots, m)$$

die Determinante

$$C^* = |c_{JK}| \quad (J, K = 1, 2, \ldots, mn),$$

wo

$$c_{JK} = a_{i\,q_2+1}\, b_{q_1+1\,k}$$

zu setzen ist, in dem Falle daß

$$J = n q_1 + i \qquad 0 < i \leqq n$$
$$K = m q_2 + k \qquad 0 < k \leqq m$$

ist, so besteht die Identität

$$\text{(I.)} \qquad C^* = \varepsilon A^m B^n \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

Im Jahre 1889 teilte Herr *K. Hensel* eine neue Herleitung dieses Determinantensatzes mit in seiner Arbeit „Über die Darstellung der Determinante eines Systems, welches aus zwei anderen komponiert ist" im Bd. XIV der Acta Mathematica, ohne auf die Vorzeichenbestimmung in der Identität (I.) näher einzugehen. In derselben Arbeit wird erwähnt, daß *Kronecker* diesen Satz schon vor längerer Zeit in seinen algebraischen Vorlesungen angeführt hatte. Er hat denselben jedoch nicht veröffentlicht.

Im nachfolgenden soll eine Verallgemeinerung dieses Kroneckerschen Satzes mitgeteilt und zugleich die Vorzeichenfrage erledigt werden.

Es seien m Determinanten n-ten Grades und n Determinanten m-ten Grades

$$A^{(g)} = |a_{ij}^{(g)}| \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$
$$(g = 1, 2, \ldots, m)$$
$$B^{(h)} = |b_{kl}^{(h)}| \quad (k, l = 1, 2, \ldots, m)$$
$$(h = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben. Komponiert man aus den Elementen dieser Determinanten die Determinante mn-ten Grades

$$C = \left| \begin{array}{llll}
a_{11}^{(1)} b_{11}^{(1)} \ldots a_{11}^{(1)} b_{1m}^{(1)} & a_{12}^{(1)} b_{11}^{(2)} \ldots a_{12}^{(1)} b_{1m}^{(2)} \ldots . & a_{1n}^{(1)} b_{11}^{(n)} \ldots a_{1n}^{(1)} b_{1m}^{(n)} \\
a_{21}^{(1)} b_{11}^{(1)} \ldots a_{21}^{(1)} b_{1m}^{(1)} & a_{22}^{(1)} b_{11}^{(2)} \ldots a_{22}^{(1)} b_{1m}^{(2)} \ldots . & a_{2n}^{(1)} b_{11}^{(n)} \ldots a_{2n}^{(1)} b_{1m}^{(n)} \\
\vdots & & \\
a_{n1}^{(1)} b_{11}^{(1)} \ldots a_{n1}^{(1)} b_{1m}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} b_{11}^{(2)} \ldots a_{n2}^{(1)} b_{1m}^{(2)} \ldots . & a_{nn}^{(1)} b_{11}^{(n)} \ldots a_{nn}^{(1)} b_{1m}^{(n)} \\
a_{11}^{(2)} b_{21}^{(1)} \ldots a_{11}^{(2)} b_{2m}^{(1)} & a_{12}^{(2)} b_{21}^{(2)} \ldots a_{12}^{(2)} b_{2m}^{(2)} \ldots . & a_{1n}^{(2)} b_{21}^{(n)} \ldots a_{1n}^{(2)} b_{2m}^{(n)} \\
a_{21}^{(2)} b_{21}^{(1)} \ldots a_{21}^{(2)} b_{2m}^{(1)} & a_{22}^{(2)} b_{21}^{(2)} \ldots a_{22}^{(2)} b_{2m}^{(2)} \ldots . & a_{2n}^{(2)} b_{21}^{(n)} \ldots a_{2n}^{(2)} b_{2m}^{(n)} \\
\vdots & & \\
a_{n1}^{(2)} b_{21}^{(1)} \ldots a_{n1}^{(2)} b_{2m}^{(1)} & a_{n2}^{(2)} b_{21}^{(2)} \ldots a_{n2}^{(2)} b_{2m}^{(2)} \ldots . & a_{nn}^{(2)} b_{21}^{(n)} \ldots a_{nn}^{(2)} b_{2m}^{(n)} \\
\vdots & & \\
a_{11}^{(m)} b_{m1}^{(1)} \ldots a_{11}^{(m)} b_{mm}^{(1)} & a_{12}^{(m)} b_{m1}^{(2)} \ldots a_{12}^{(m)} b_{mm}^{(2)} \ldots . & a_{1n}^{(m)} b_{m1}^{(n)} \ldots a_{1n}^{(m)} b_{mm}^{(n)} \\
a_{21}^{(m)} b_{m1}^{(1)} \ldots a_{21}^{(m)} b_{mm}^{(1)} & a_{22}^{(m)} b_{m1}^{(2)} \ldots a_{22}^{(m)} b_{mm}^{(2)} \ldots . & a_{2n}^{(m)} b_{m1}^{(n)} \ldots a_{2n}^{(m)} b_{mm}^{(n)} \\
\vdots & & \\
a_{n1}^{(m)} b_{m1}^{(1)} \ldots a_{n1}^{(m)} b_{mm}^{(1)} & a_{n2}^{(m)} b_{m1}^{(2)} \ldots a_{n2}^{(m)} b_{mm}^{(2)} \ldots . & a_{nn}^{(m)} b_{m1}^{(n)} \ldots a_{nn}^{(m)} b_{mm}^{(n)}
\end{array} \right|,$$

deren Gesetzmäßigkeit sich darin ausdrückt, daß das K-te Element der J-ten Zeile

$$c_{JK} = a_{i\,q_2+1}^{(q_1+1)} b_{q_1+1\,k}^{(q_2+1)}$$

zu setzen ist, falls

$$J = nq_1 + i \qquad 0 < i \leqq n$$
$$K = mq_2 + k \qquad 0 < k \leqq m$$

ist; alsdann besteht die Identität

$$\text{(II.)} \qquad C = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}\frac{n(n-1)}{2}} A^{(1)} A^{(2)} \cdots A^{(m)} B^{(1)} B^{(2)} \cdots B^{(n)},$$

auf deren rechter Seite das Vorzeichen nur dann negativ ausfällt, wenn $m \equiv n \equiv 3 \pmod 4$ *ist.*

Die Herleitung der Identität (II.) kann am einfachsten vermittelst eines bekannten Graßmannschen Satzes geschehen. Hat man das System von n alternierenden Einheiten

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_k, \ldots, \varepsilon_n,$$

so daß zwischen diesen Einheiten die n^2 Relationen

$$\varepsilon_i \varepsilon_k = -\varepsilon_k \varepsilon_i \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

bestehen, ferner n vermittels dieser Einheiten gebildete hyperkomplexe Zahlen

$$A_i = a_{i1}\varepsilon_1 + a_{i2}\varepsilon_2 + \cdots + a_{in}\varepsilon_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

so bestehen auch die n^2 Gleichungen

$$A_i A_k = -A_k A_i \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

und ferner gilt für das äußere Produkt der Größen A_i die Relation

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = |a_{ik}|_{(i,k=1,2,\ldots,n)} \cdot \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n.$$

Vermittels dieser Sätze kann die Determinante mn-ten Grades

$$C = |c_{JK}|_{(J,K=1,2,\ldots,mn)} = |a_{i\,q_2+1}^{(q_1+1)} b_{q_1+1\,k}^{(q_2+1)}|$$

folgendermaßen ausgewertet werden.

Es sei

$$(E)\qquad \begin{array}{c} \varepsilon_{11}\,\varepsilon_{12}\cdots\varepsilon_{1g}\cdots\varepsilon_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_{h1}\,\varepsilon_{h2}\cdots\varepsilon_{hg}\cdots\varepsilon_{hm} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_{n1}\,\varepsilon_{n2}\cdots\varepsilon_{ng}\cdots\varepsilon_{nm} \end{array}$$

ein System von mn alternierenden Einheiten, so daß die $(mn)^2$ Beziehungen

$$\varepsilon_{hg}\,\varepsilon_{h'g'} = -\,\varepsilon_{h'g'}\,\varepsilon_{hg}$$
$$(g, g' = 1, 2, \ldots, n;\ h, h' = 1, 2, \ldots, m)$$

bestehen; bildet man ferner vermittelst dieser Einheiten die n Systeme

$$B_1^{(h)} = b_{11}^{(h)}\,\varepsilon_{h1} + b_{12}^{(h)}\,\varepsilon_{h2} + \cdots + b_{1m}^{(h)}\,\varepsilon_{hm}$$
$$B_2^{(h)} = b_{21}^{(h)}\,\varepsilon_{h1} + b_{22}^{(h)}\,\varepsilon_{h2} + \cdots + b_{2m}^{(h)}\,\varepsilon_{hm}$$
$$B_m^{(h)} = b_{m1}^{(h)}\,\varepsilon_{h1} + b_{m2}^{(h)}\,\varepsilon_{h2} + \cdots + b_{mm}^{(h)}\,\varepsilon_{hm}$$
$$(h = 1, 2, \ldots, n),$$

von alternierenden Zahlen, so gelten für die äußeren Produkte der Zahlen eines dieser Systeme die Relationen

$$(1.)\qquad B_1^{(h)}\,B_2^{(h)}\cdots B_m^{(h)} = |b_{ik}^{(h)}|_{(i,k=1,2,\ldots,m)}\,\varepsilon_{h1}\,\varepsilon_{h2}\cdots\varepsilon_{hm}$$
$$(h = 1, 2, \ldots, n)$$

und

$$B_i^{(h)}\,B_k^{(l)} = -\,B_k^{(h)}\,B_i^{(l)} \qquad (h, i, k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Übergehend zur Darstellung der Determinante C als Produkt von mn aus dem Systeme (E) abgeleiteten alternierenden Zahlen, sei vorab bemerkt, daß die Reihen der Determinante sich aus dem Schema

$$a_{g1}^{(h)}\,b_{h1}^{(1)}, \ldots, a_{g1}^{(h)}\,b_{hm}^{(1)},\ a_{g2}^{(h)}\,b_{h1}^{(2)}, \ldots, a_{g2}^{(h)}\,b_{hm}^{(2)}, \ldots., a_{gn}^{(h)}\,b_{h1}^{(n)}, \ldots, a_{gn}^{(h)}\,b_{hm}^{(n)}$$

ergeben, indem man für g

$$g = 1, 2, \ldots, n$$

und alsdann für h

$$h = 1, 2, \ldots, m$$

setzt. Bildet man diesen Reihen entsprechend mittels der Einheiten (E) die folgenden mn alternierenden Zahlen:

$$C_{gh} = \sum_{s=1}^{n}(a_{gs}^{(h)}\,b_{h1}^{(s)}\,\varepsilon_{s1} + a_{gs}^{(h)}\,b_{h2}^{(s)}\,\varepsilon_{s2} + \cdots + a_{gs}^{(h)}\,b_{hm}^{(s)}\,\varepsilon_{sm})$$
$$= \sum_{s=1}^{n} a_{gs}^{(h)}\,(b_{h1}^{(s)}\,\varepsilon_{s1} + b_{h2}^{(s)}\,\varepsilon_{s2} + \cdots + b_{hm}^{(s)}\,\varepsilon_{sm})$$
$$= a_{g1}^{(h)}\,B_h^{(1)} + a_{g2}^{(h)}\,B_h^{(2)} + \cdots + a_{gn}^{(h)}\,B_h^{(n)}$$
$$(g = 1, 2, \ldots, n;\ \ h = 1, 2, \ldots, m),$$

so ist im Sinne des Graßmannschen Satzes

$$C\prod_{h=1}^{m}\prod_{g=1}^{n}\varepsilon_{hg} = \prod_{h=1}^{m}\prod_{g=1}^{n}(a_{g1}^{(h)}\,B_h^{(1)} + a_{g2}^{(h)}\,B_h^{(2)} + \cdots + a_{gn}^{(h)}\,B_h^{(n)}).$$

Da aber

$$B_h^{(i)}\,B_h^{(k)} = -\,B_h^{(k)}\,B_h^{(i)}$$

ist, so kann man für

$$\Pi(a_{g1}^{(h)} B_h^{(1)} + a_{g2}^{(h)} B_h^{(2)} + \cdots + a_{gn}^{(h)} B_h^{(n)})$$

im Sinne des Graßmannschen Satzes

$$|\, a_{ik}^{(h)} |_{(i,k=1,2,\ldots,n)} B_h^{(1)} B_h^{(2)} \cdots B_h^{(n)} = A^{(h)} B_h^{(1)} B_h^{(2)} \cdots B_h^{(n)}$$

setzen, so daß

$$(2.) \qquad C \prod_{h=1}^{m} \prod_{g=1}^{n} \varepsilon_{hg}$$
$$= A^{(1)} A^{(2)} \cdots A^{(m)} B_1^{(1)} B_1^{(2)} \cdots B_1^{(n)} B_2^{(1)} B_2^{(2)} \cdots B_2^{(n)} \cdots\cdots B_m^{(1)} B_m^{(2)} \cdots B_m^{(n)}$$

wird. Welche Vorzeichenveränderung erleidet das Produkt

$$(A_1) \qquad B_1^{(1)} B_1^{(2)} \cdots B_1^{(n)} B_2^{(1)} B_2^{(2)} \cdots B_2^{(n)} \cdots\cdots B_m^{(1)} B_m^{(2)} \cdots B_m^{(n)},$$

falls man seine Faktoren in der nachfolgenden Anordnung

$$(A_2) \qquad B_1^{(1)} B_2^{(1)} \cdots B_m^{(1)} B_1^{(2)} B_2^{(2)} \cdots B_m^{(2)} \cdots\cdots B_1^{(n)} B_2^{(n)} \cdots B_m^{(n)}$$

hinschreibt? Da die Größen $B_g^{(h)}$ von alternierendem Charakter sind, hat jede Transposition von zwei Faktoren eine Vorzeichenveränderung zur Folge. Beim Übergang von der Anordnung (A_1) zu (A_2) wird das Vorzeichen so oft gewechselt, als es Inversionen in der Permutation

$$1, n+1, \ldots, (m-1)\,n, 2, n+2, \ldots, (m-1)\,n+2, \ldots., n, 2\,n, \ldots, nn$$

gibt. Die Anzahl dieser Inversionen ergibt sich aus der Formel

$$\begin{aligned}
&(n-1) + 2\,(n-1) + \cdots + (m-1)\,(n-1) + \\
&+ (n-2) + 2\,(n-2) + \cdots + (m-1)\,(n-2) + \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + \cdots + (m-1)\cdot 1 = \\
&= \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{m(m-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Die Identität (2.) kann demnach folgendermaßen geschrieben werden:

$$C \prod_{h=1}^{m} \prod_{g=1}^{n} \varepsilon_{hg} =$$
$$= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}\,\frac{n(n-1)}{2}} A^{(1)} A^{(2)} \cdots A^{(m)} B_1^{(1)} B_2^{(1)} \cdots B_m^{(1)} \cdots B_1^{(n)} B_2^{(n)} B_m^{(n)}.$$

Bezugnehmend auf die Relationen (1.) ergibt sich schließlich

$$(II.) \qquad C = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}\,\frac{n(n-1)}{2}} A^{(1)} A^{(2)} \cdots A^{(m)} B^{(1)} B^{(2)} \cdots B^{(n)},$$

womit der in (II.) ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Setzt man die Matrizen

$$||\, a_{ik}^{(g)} ||_{(i,k=1,2,\ldots,n)} \qquad (g = 1, 2, \ldots, m)$$

alle gleich mit der Matrix

$$||\, a_{ik} ||_{(i,k=1,2,\ldots,n)}$$

und die Matrizen

$$||\, b_{rs}^{(h)} ||_{(r,s=1,2,\ldots,m)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

alle gleich mit der Matrix

$$||\, b_{rs} ||_{(r,s=1,2,\ldots,m)}$$

und bezeichnet die Determinanten $|a_{ik}|$ und $|b_{rs}|$ durch A resp. B, so ergibt sich aus (II.) der Satz (I.) nämlich

$$C^* = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}\frac{n(n-1)}{2}} A^m B^n,$$

den schon Kronecker bewiesen hat.

Setzt man nur die Matrizen $||a_{ik}^{(g)}||$ gleich der Matrix $||a_{ik}||$ und bezeichnet wieder die Determinante $|a_{ik}|$ durch A, so geht die Determinante C in eine andere C^{**} über, deren Zeilen aus dem Schema

$$a_{g1}b_{h1}^{(1)}, \ldots, a_{g1}b_{hm}^{(1)}, a_{g2}b_{h1}^{(2)}, \ldots, a_{g2}b_{hm}^{(2)}, \ldots, a_{gn}b_{h1}^{(n)}, \ldots, a_{gn}b_{hm}^{(n)}$$

hervorgehen, indem man

$$g = 1, 2, \ldots, n$$
$$h = 1, 2, \ldots, m$$

setzt. Es gilt alsdann die Identität

$$C^{**} = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}\frac{n(n-1)}{2}} A^m B^{(1)} B^{(2)} \cdots B^{(n)}.$$

Aus dieser Identität ergibt sich unmittelbar der in der Theorie der Zahlkörper wichtige Satz von Hilbert:

Bedeuten D und d die Diskriminanten des Oberkörpers K und des Unterkörpers k und bezeichnet $n(D_k)$ die Norm der Relativdiskriminante D_k, genommen im Körper k, so ist

$$D = d_n^r(D_k);$$

hierbei bezeichnet r den Relativgrad von K in bezug auf k [1]).

---

[1]) Siehe *D. Hilbert*, „Zahlbericht" im Bd. IV des Jahresberichtes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (1894/95) S. 206.

Eingegangen 8. März 1929.

Über die Bernoullische Reihenentwicklung.

Von *M. Krafft* in Marburg a. d. L.

In einer Abhandlung in den Acta eruditorum von 1694 [1]) wendet *Johann Bernoulli* zur Auswertung bestimmter Integrale folgendes Verfahren an:

Er integriert (in moderne Bezeichnungen übertragen) die Identität

$$(1) \qquad \varphi(x) = \varphi(x) - \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left\{ \frac{(-1)^\nu x^\nu \varphi^{(\nu)}(x)}{\nu!} - \frac{(-1)^\nu x^\nu \varphi^{(\nu)}(x)}{\nu!} \right\}$$

gliedweise. Durch partielle Integration und geeignete Zusammenfassung folgert er dann hieraus weiter

$$(2) \qquad \int_0^x \varphi(x)\, dx = \frac{x\varphi(x)}{1!} - \frac{x^2\varphi'(x)}{2!} + \frac{x\varphi''(x)}{3!} - \cdots.$$

In einem Brief von *Leibniz* [2]) an Bernoulli vom Dez. 1694 findet sich dann (allerdings mit $f(0) = 0$) die Umformung von (2) in

$$(3) \qquad f(x) = f(0) + \frac{xf'(x)}{1!} - \frac{x^2 f''(x)}{2!} + \frac{x^3 f'''(x)}{3!} - \frac{x^4 f^{\mathrm{IV}}(x)}{4!} + \cdots.$$

Diese Reihe (3) soll die Bernoullische Reihenentwicklung von $f(x)$ heißen.

Die geschilderte Herleitung von (2) aus (1) ist natürlich nur unter gewissen Kautelen unanfechtbar. Wir verzichten auf eine Präzisierung des Bernoullischen Gedankenganges und untersuchen (3) direkt für komplexe x und analytisches, bei $x = 0$ reguläres $f(x)$.

Die sich ergebenden hübschen und mühelos zu beweisenden Eigenschaften von (3) sind m. W. bisher nicht ausgesprochen worden [3]). Der Grund mag wohl darin zu suchen sein, daß die formale Ähnlichkeit von (3) mit der Taylorschen Reihe immer verlockte, (3) durch geeignete Substitutionen auf diese zurückzuführen [4]). Wir beweisen:

1. Ist $f(x)$ in einer Umgebung von $x = 0$ regulär analytisch und bedeutet x_ψ die auf dem Strahl von der Neigung ψ gegen die positiv reelle Achse $(-\pi < \psi \leqq \pi)$ gelegene Ecke des Mittag-Lefflerschen Hauptsterns von $f(x)$, so ist (3) richtig für alle x, die im Durchschnitt ϑ der Halbebenen [5])

$$(4) \qquad \Re \frac{x}{x_\psi} < \frac{1}{2} \qquad\qquad (-\pi < \psi \leqq \pi)$$

liegen. Außerhalb ϑ divergiert die Reihe auf der rechten Seite von (3) überall, ausgenommen höchstens in Randpunkten von ϑ, in denen dann wieder (3) richtig ist [6]).

---

[1]) Wieder abgedruckt in Johannis Bernoulli Opera omnia T. I, p. 125—128.

[2]) Für die geschichtlichen Tatsachen vgl. *A. Pringsheim*, Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes, Bibliotheca mathematica (3) **1** (1900), insbes. S. 435—437.

[3]) Anmerkung bei der Korrektur: Mit der Bernoullischen Reihe hat sich schon beschäftigt *Mittag-Leffler*, Über den Konvergenzbereich der Bernoullischen Reihe, Archiv der Math. u. Phys. (3) **2** (1902), S. 49—54.

[4]) Z. B. Pringsheim a. a. O. S. 437, Anmerkung.

[5]) $\Re$ bedeutet „reeller Teil von".

[6]) Das Gültigkeitsgebiet von (3) ist also das auf die Hälfte verkleinerte „Borelsche Summationspolygon". Vgl. *Borel*, Leçons sur les séries divergentes, S. 120 ff.

2. In jedem abgeschlossenen Teilgebiet ϑ^* von ϑ konvergiert (3) absolut und gleichmäßig.

Zum Beweis von 1. setzen wir x als fest gegeben voraus. Dann ist (3) der Spezialfall der Taylorreihe

$$(5) \qquad f(0)+f(x)-f(x+h)=f(0)-\frac{f'(x)h}{1!}-\frac{f''(x)h^2}{2!}-\frac{f'''(x)h^3}{3!}-\cdots,$$

der für $h=-x$ sich ergibt.

Gibt es nun ein x_ψ, für welches $\Re\frac{x}{x_\psi}>\frac{1}{2}$, so liegt im Kreis vom Radius $|x|$ um x diese singuläre Stelle x_ψ, d. h. (5) konvergiert für $h=-x$ nicht. Ist dagegen für jedes ψ die Ungleichung (4) erfüllt, so ist der Konvergenzradius von (5) größer als $|x|$. Gibt es ein oder mehrere x_ψ, für welche $\Re\frac{x}{x_\psi}=\frac{1}{2}$, während für alle anderen (4) richtig ist, so ist der Konvergenzradius von (5) gleich $|x|$. Dann *kann* (5) für $h=-x$ konvergieren (der Abelsche Stetigkeitssatz ergibt dann als Summe $f(x)$), oder divergieren. Damit ist 1. bewiesen.

2. beweisen wir, indem wir zeigen, daß in ϑ^* die Glieder der Reihe (3) absolut kleiner sind als die Glieder einer konvergenten geometrischen Reihe mit konstanten Gliedern. Es gibt nämlich ein von x unabhängiges $\varepsilon>0$ derart, daß der Kreis vom Radius $|x|(1+\varepsilon)$ ganz im Regularitätsbereich von $f(x)$ liegt, falls x in ϑ^* liegt. Daraus folgt, daß für $x\neq 0$ aus ϑ^* gilt:

$$\left|\frac{x^\nu f^{(\nu)}(x)}{\nu!}\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\frac{x^\nu f(\xi)\,d\xi}{(\xi-x)^{\nu+1}}\right|,$$

die Integration erstreckt über den Kreis $|\xi-x|=|x|(1+\varepsilon)$. Substituieren wir hier $\xi=\frac{x}{t}$, so folgt:

$$(6) \qquad \left|\frac{x^\nu f^{(\nu)}(x)}{\nu!}\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_K\frac{t^{\nu+1}}{(1-t)^{\nu+1}}f\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t^2}\right|.$$

Dabei bedeutet K den Kreis $|1-t|=(1+\varepsilon)|t|$, dessen Mittelpunkt auf der reellen t-Achse liegt und der diese in den Punkten $t=-\frac{1}{\varepsilon}$ und $t=\frac{1}{2+\varepsilon}$ schneidet. Hieraus folgt übrigens, daß für die t auf K gilt

$$\left|\frac{t}{1-t}\right|=\frac{1}{1+\varepsilon},\qquad \left|\frac{1}{t}\right|\leqq\frac{1}{\varepsilon}.$$

Da die Vereinigungsmenge der Kreise $|\xi-x|\leqq(1+\varepsilon)|x|$, falls x die Punkte von ϑ^* durchläuft, ein wegen der Abgeschlossenheit von ϑ^* ebenfalls abgeschlossenes Regularitätsgebiet für $f(\xi)$ bildet, gibt es sicher ein von x unabhängiges M derart, daß auf der ganzen Integrationskurve

$$|f(\xi)|=\left|f\left(\frac{x}{t}\right)\right|<M$$

ist. Aus (6) folgt nun durch triviale Abschätzungen sofort, daß für $x\neq 0$ aus ϑ^* gilt:

$$(7) \qquad \left|\frac{x^\nu f^{(\nu)}(x)}{\nu!}\right|<\frac{1}{2\pi}\frac{M}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{2+\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\pi\cdot\frac{1}{(1+\varepsilon)^{\nu+1}}=\frac{\text{Const.}}{(1+\varepsilon)^{\nu+1}}.$$

Da (7) für $x=0$ von selbst richtig ist, ist auch 2. vollständig bewiesen.

Marburg 5. 5. 1929.

Eingegangen 5. Mai 1929.